MATRISALAR NAZARIYASINING IQTISODIY MASALALARNI YECHISHGA TATBIQI

Nizomxonov Erkinxon Nizom o‘g‘li
Toshkent amaliy fanlar universiteti
Raqamli va fundamental fanlar kafedrasi katta o‘qituvchisi
E-mail: erkinxonnizomxonov\@gmail.com
Sharipova Gulnora Anvarjonovna
Toshkent amaliy fanlar universiteti
Raqamli va fundamental fanlar kafedrasi o‘qituvchisi
E-mail: gulnorasharipova2402\@gmail.com
ORCID: 0009-0001-0774-979X
Ismoilov Ikrom Obid o‘g‘li
Toshkent amaliy fanlar universiteti
Iqtisodiyot fakulteti 1-kurs talabasi

DOI: ***https://doi.org/10.5281/zenodo.24056561***

Annotatsiya. *Maqolada matrisalar nazariyasining iqtisodiy masalalarni yechishdagi qo‘llanilishi ko‘rib chiqiladi. Matrisalar ustida amallar, determinant va teskari matrisa tushunchalari asosida to‘rtta turdagi iqtisodiy masala – resurs sarfi va xarajatlarni hisoblash, Leontevning “xarajatlar–ishlab chiqarish” (tarmoqlararo balans) modeli, Markov zanjirlari yordamida bozor ulushlarini bashorat qilish hamda ko‘p tovarli bozor muvozanatini topish – to‘liq yechimlari bilan bayon etilgan. Ta’limning raqamli transformatsiyasi nuqtai nazaridan ushbu masalalarni MS Excel elektron jadvali va Python dasturlash tilining NumPy kutubxonasi yordamida yechish va tekshirish usullari ko‘rsatilib, mavzuni o‘qitish bo‘yicha amaliy tavsiyalar berilgan. Natijalar jadval, diagramma va chizmalar bilan tasvirlangan.*

Kalit so‘zlar: *matrisa, determinant, teskari matrisa, tarmoqlararo balans, Leontev modeli, Markov zanjiri, bozor muvozanati, chiziqli tenglamalar sistemasi, raqamli ta’lim vositalari.*

Аннотация. *В статье рассматривается применение теории матриц к решению экономических задач. На основе операций над матрицами, понятий определителя и обратной матрицы с полными решениями изложены четыре типа экономических задач: расчёт расхода ресурсов и затрат, модель Леонтьева «затраты–выпуск» (межотраслевой баланс), прогнозирование рыночных долей с помощью цепей Маркова и нахождение равновесия на многотоварном рынке. С позиции цифровой трансформации образования показаны способы решения и проверки этих задач с помощью электронной таблицы MS Excel и библиотеки NumPy языка программирования Python, даны практические рекомендации по преподаванию темы. Результаты проиллюстрированы таблицами, диаграммами и графиками.*

Ключевые слова: *матрица, определитель, обратная матрица, межотраслевой баланс, модель Леонтьева, цепь Маркова, рыночное равновесие, система линейных уравнений, цифровые средства обучения.*

Abstract. *The article considers the application of matrix theory to solving economic problems. Based on matrix operations and the concepts of the determinant and the inverse matrix, four types of economic problems are presented with complete solutions: calculation of resource consumption and costs, the Leontief input–output (inter-industry balance) model, forecasting of market shares by means of Markov chains, and finding the equilibrium of a multi-commodity market. From the standpoint of the digital transformation of education, methods for solving and verifying these problems with the MS Excel spreadsheet and the NumPy library of the Python programming language are shown, and practical recommendations for teaching the topic are given. The results are illustrated with tables, diagrams and graphs.*

Keywords: *matrix, determinant, inverse matrix, inter-industry balance, Leontief model, Markov chain, market equilibrium, system of linear equations, digital learning tools.*

1. Kirish

O‘zbekiston Respublikasida oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasi va “Raqamli O‘zbekiston – 2030” strategiyasida ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni keng joriy etish, talabalarda amaliy va tahliliy kompetensiyalarni shakllantirish ustuvor vazifa sifatida belgilangan [1, 2]. Iqtisodiy yo‘nalishdagi talabalar uchun bu vazifaning muhim tarkibiy qismi – matematik modellarni real iqtisodiy jarayonlarga tatbiq eta olish va hisob-kitoblarni zamonaviy raqamli vositalar yordamida bajarish ko‘nikmasidir.

Zamonaviy iqtisodiyot ko‘p sonli o‘zaro bog‘liq ko‘rsatkichlar – tarmoqlar, mahsulot turlari, resurslar, narxlar va bozor ishtirokchilari bilan ish ko‘radi. Bunday ma’lumotlarni tartibli jadval ko‘rinishida yozish va ular ustida bir vaqtning o‘zida amallar bajarish uchun matrisalar nazariyasi eng qulay matematik vositadir [3, 4, 5]. Iqtisodiy jarayonning har bir jadvali – xarajat normalari, ishlab chiqarish rejasi, narxlar ro‘yxati – matrisa sifatida qaraladi, jadvallar ustidagi iqtisodiy amallar esa matrisalar ustidagi amallarga mos keladi.

V. Leontev tomonidan taklif etilgan tarmoqlararo balans modeli matrisalar nazariyasining iqtisodiyotdagi eng mashhur tatbiqidir va u 1973-yilda iqtisod bo‘yicha Nobel mukofotiga sazovor bo‘lgan [6, 7]. Shuningdek, Markov zanjirlari, chiziqli dasturlash, bozor muvozanati modellari va ekonometrikada ham matrisalar asosiy apparat hisoblanadi [8, 9, 10, 11].

Maqolaning maqsadi – matrisalar nazariyasining asosiy tushunchalarini iqtisodiy masalalarni yechishga to‘g‘ridan-to‘g‘ri tatbiq etish va har bir holat uchun to‘liq hisoblangan misollar keltirishdir. Maqolada quyidagi vazifalar hal qilinadi:

- matrisalar ustidagi amallar va ularning iqtisodiy ma’nosini aniqlash;
- resurs sarfi va xarajatlarni matrisa ko‘paytmasi orqali hisoblash;
- Leontev modelida tarmoqlarning yalpi ishlab chiqarish hajmini teskari matrisa yordamida topish;
- Markov zanjiri yordamida bozor ulushlarining dinamikasini va barqaror holatini aniqlash;
- ko‘p tovarli bozor muvozanati narxlarini chiziqli tenglamalar sistemasidan topish;
- ko‘rilgan masalalarni raqamli vositalar (MS Excel, Python) yordamida yechish va mavzuni o‘qitish bo‘yicha amaliy tavsiyalar ishlab chiqish.

© Namangan davlat pedagogika instituti | Intellektual fanlar va axborot texnologiyalari kafedrasi
© “Smart Quill Publishing” nashriyoti | www.smartquillpublishing.uz

2. Nazariy asoslar

Matrisa deb m ta satr va n ta ustundan iborat to‘g‘ri to‘rtburchak sonlar jadvaliga aytiladi: $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Iqtisodiy masalalarda a_{ij} odatda i-turdagi ob’ektning j-ko‘rsatkichi bo‘yicha qiymatini bildiradi. 1-jadvalda matrisalar ustidagi asosiy amallar va ularning iqtisodiy talqini keltirilgan.

1-jadval. Matrisalar ustidagi amallar va ularning iqtisodiy ma’nosi

Amal	Formula	Iqtisodiy ma’nosi
Qo‘shish	$C = A + B$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	Ikki davr yoki ikki filial ko‘rsatkichlarini jamlash
Songa ko‘paytirish	$B = \lambda A$, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$	Hajmni λ marta oshirish yoki narxni indekslash
Matrisalar ko‘paytmasi	$c_{ij} = \Sigma_k\, a_{ik} b_{kj}$	Reja × norma = jami resurs sarfi; resurs × narx = xarajat
Transponirlash	A^T, $(a^T)_{ij} = a_{ji}$	Satr va ustunlar rolini almashtirish (mahsulot ↔ resurs)
Teskari matrisa	$A^{-1} = (1/\det A)\cdot \operatorname{adj} A$	Natijadan sababga o‘tish: yakuniy talabdan ishlab chiqarish hajmiga
Determinant	$\det A \neq 0$	Sistemaning yagona yechimga ega ekanligi alomati

Matrisalar ko‘paytmasi $A(m\times k)\cdot B(k\times n)$ faqat birinchi matrisaning ustunlar soni ikkinchisining satrlar soniga teng bo‘lganda aniqlanadi va umuman olganda kommutativ emas: $AB \neq BA$. Kvadrat matrisa A uchun $\det A \neq 0$ bo‘lsa, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ shartini qanoatlantiruvchi teskari matrisa mavjud va u quyidagicha topiladi:

$$A^{-1} = (1/\det A)\cdot \tilde{A}^T,\quad \tilde{A} = (A_{ij}),\quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

bu yerda M_{ij} – a_{ij} elementning minori, A_{ij} – algebraik to‘ldiruvchisi. $AX = B$ ko‘rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi $\det A \neq 0$ bo‘lganda yagona $X = A^{-1}B$ yechimga ega (matrisa usuli), uni Kramer formulalari $x_j = \Delta_j/\Delta$ orqali ham topish mumkin [3, 12, 13].

3. Iqtisodiy masalalarni matrisalar yordamida yechish

3.1. Resurs sarfi va ishlab chiqarish xarajatlarini hisoblash

Korxona uchta mahsulot (P_1, P_2, P_3) ishlab chiqaradi va uchta resursdan – xomashyo (kg), ish vaqti (soat) va energiya (kVt·soat) – foydalanadi. Bu holatda resurs sarfini hisoblash matrisalar ko‘paytmasi amaliga to‘g‘ridan-to‘g‘ri mos keladi.

1-misol.

Mahsulot birligiga resurs sarfi normalari A matrisasi (satrlar – mahsulotlar, ustunlar – resurslar), ikki chorak uchun ishlab chiqarish rejasi Q matrisasi (satrlar – choraklar, ustunlar – mahsulotlar) va resurs birligining narxi c (ming so‘m) berilgan. Har bir chorak uchun resurslarga umumiy ehtiyojni va jami xarajatni toping.

Berilgan:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} 100 & 150 & 200 \\ 120 & 140 & 180 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 50 \\ 20 \\ 10 \end{vmatrix}$$

Yechish. 1) Resurslarga ehtiyoj matrisasi $R = Q \cdot A$ ko‘paytma orqali topiladi. Masalan, I chorakda xomashyoga ehtiyoj: $100 \cdot 2 + 150 \cdot 4 + 200 \cdot 3 = 1400$ kg; ish vaqtiga: $100 \cdot 3 + 150 \cdot 1 + 200 \cdot 2 = 850$ soat; energiyaga: $100 \cdot 1 + 150 \cdot 2 + 200 \cdot 2 = 800$ kVt·soat. Shu kabi II chorak uchun ham hisoblab, quyidagini olamiz:

$$R = QA = \begin{vmatrix} 1400 & 850 & 800 \\ 1340 & 860 & 760 \end{vmatrix}$$

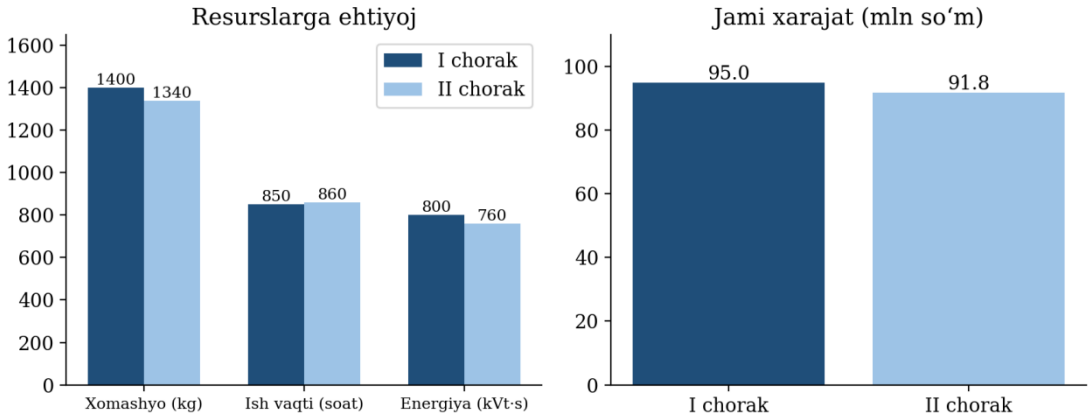
2) Jami xarajat $S = R \cdot c$: I chorak uchun $1400 \cdot 50 + 850 \cdot 20 + 800 \cdot 10 = 95\,000$, II chorak uchun $1340 \cdot 50 + 860 \cdot 20 + 760 \cdot 10 = 91\,800$ (ming so‘m).

$$S = Rc = \begin{vmatrix} 95\,000 \\ 91\,800 \end{vmatrix}$$

3) Tekshirish uchun har bir mahsulot tannarxini topamiz: $u = A \cdot c = (2 \cdot 50 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10;\ 4 \cdot 50 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 10;\ 3 \cdot 50 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10)^{T} = (170;\ 240;\ 210)^{T}$. Endi $S = Q \cdot u$: I chorak uchun $100 \cdot 170 + 150 \cdot 240 + 200 \cdot 210 = 95\,000$, II chorak uchun $120 \cdot 170 + 140 \cdot 240 + 180 \cdot 210 = 91\,800$ – natijalar mos keladi.

2-jadval. 1-misol natijalari

Ko‘rsatkich	I chorak	II chorak
Xomashyoga ehtiyoj, kg	1 400	1 340
Ish vaqtiga ehtiyoj, soat	850	860
Energiyaga ehtiyoj, kVt·soat	800	760
Jami xarajat, ming so‘m	95 000	91 800



1-rasm. Resurslarga ehtiyoj va jami xarajat (1-misol)

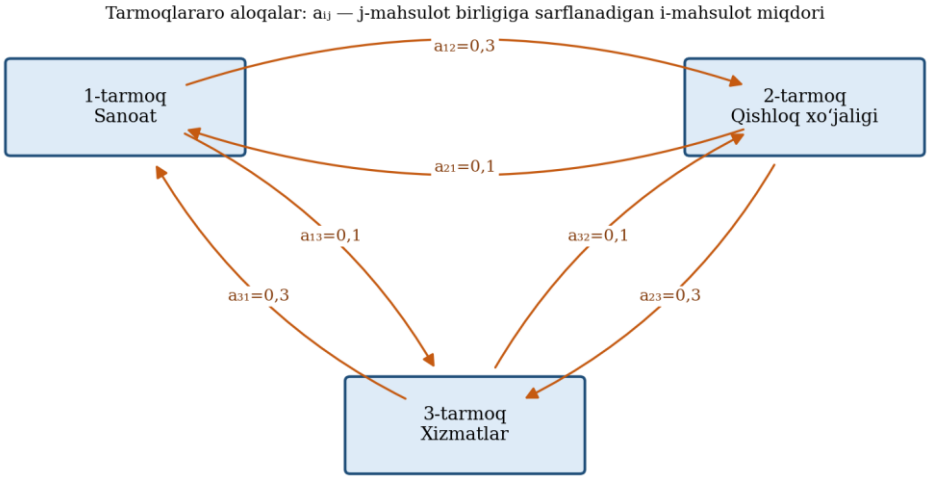
Xulosa. II chorakda ishlab chiqarish hajmi boshqacha tarkibda bo‘lgani uchun xomashyo va energiya sarfi kamaygan, ish vaqti esa biroz oshgan; umumiy xarajat 3200 ming so‘mga kamaygan. Matrisa ko‘paytmasi bir amalda barcha mahsulot, resurs va davrlar bo‘yicha hisobni beradi.

3.2. Leontevning tarmoqlararo balans modeli

Iqtisodiyot n ta tarmoqdan iborat bo‘lsin. X_i – i-tarmoqning yalpi mahsuloti, Y_i – yakuniy mahsuloti (iste’mol, investitsiya, eksport), x_{ij} – i-tarmoq mahsulotidan j-tarmoq ishlab chiqarish uchun sarflagan qismi. To‘g‘ridan-to‘g‘ri xarajat koeffitsiyentlari $a_{ij} = x_{ij}/X_j$ bo‘lib, balans tenglamasi quyidagicha yoziladi [6, 8]:

$$X = AX + Y \implies (E - A)X = Y \implies X = (E - A)^{-1} Y.$$

Matrisa **mahsuldor** deyiladi, agar har qanday $Y \geq 0$ uchun $X \geq 0$ yechim mavjud bo‘lsa. Bunga yetarli shart – A ning ustunlar yig‘indisi birdan kichik bo‘lishi; Xokins–Saymon shartiga ko‘ra $E - A$ ning barcha bosh minorlari musbat bo‘lishi ham yetarli [14, 15]. Teng ravishda, A ning eng katta xos qiymati 1 dan kichik bo‘lishi kerak.



2-rasm. Uch tarmoqli iqtisodiyotda tarmoqlararo aloqalar sxemasi (2-misol)

2-misol.

Uch tarmoqli iqtisodiyot (1 – sanoat, 2 – qishloq xo‘jaligi, 3 – xizmatlar) uchun to‘g‘ridan-to‘g‘ri xarajatlar matrisasi va yakuniy mahsulot vektori (mlrd so‘m) berilgan:

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{vmatrix}$$

Yalpi mahsulot hajmini, tarmoqlararo oqimlarni va sof (qo‘shilgan) qiymatni toping. Yakuniy talab sanoatda 10 mlrd so‘mga oshsa, yalpi mahsulot qanday o‘zgaradi?

Yechish. 1) *Mahsuldorlikni tekshirish.* A ning har bir ustuni yig‘indisi $0{,}2+0{,}1+0{,}3 = 0{,}6 < 1$ (xuddi shunday $0{,}3+0{,}2+0{,}1 = 0{,}6$ va $0{,}1+0{,}3+0{,}2 = 0{,}6$), demak matrisa mahsuldor. Xokins–Saymon sharti ham bajariladi: $0{,}8 > 0$; $0{,}8\cdot 0{,}8 - 0{,}3\cdot 0{,}1 = 0{,}61 > 0$; $\det(E - A) = 0{,}412 > 0$.

2) $E - A$ matrisasini tuzamiz va determinantini hisoblaymiz:

$$E - A = \begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix}$$

$$\det(E - A) = 0{,}8\cdot(0{,}64 - 0{,}03) + 0{,}3\cdot(-0{,}08 - 0{,}09) - 0{,}1\cdot(0{,}01 + 0{,}24) = 0{,}488 - 0{,}051 - 0{,}025 = 0{,}412.$$

3) Algebraik to‘ldiruvchilar matrisasi va unga ko‘ra teskari matrisani topamiz: $A_{11} = 0{,}61$; $A_{12} = 0{,}17$; $A_{13} = 0{,}25$; $A_{21} = 0{,}25$; $A_{22} = 0{,}61$; $A_{23} = 0{,}17$; $A_{31} = 0{,}17$; $A_{32} = 0{,}25$; $A_{33} = 0{,}61$. Transponirlab, determinantga bo‘lamiz:

$$(E - A)^{-1} = 1/0{,}412 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}61 & 0{,}25 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}61 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}17 & 0{,}61 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{,}481 & 0{,}607 & 0{,}413 \\ 0{,}413 & 1{,}481 & 0{,}607 \\ 0{,}607 & 0{,}413 & 1{,}481 \end{vmatrix}$$

4) Yalpi mahsulot: $X = (E - A)^{-1}Y$. Masalan, $X_1 = (0{,}61\cdot 100 + 0{,}25\cdot 200 + 0{,}17\cdot 150)/0{,}412 = 136{,}5/0{,}412 \approx 331{,}31$. Qolganlari ham shunday hisoblanadi:

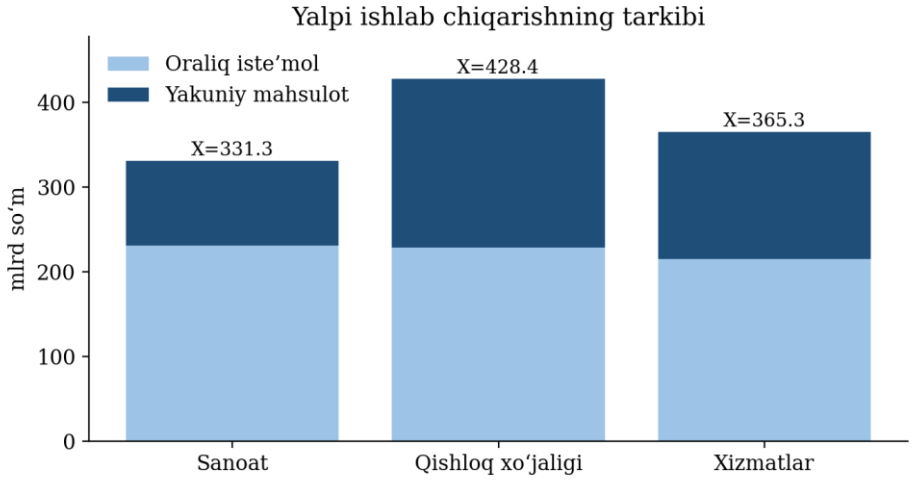
$$X = \begin{vmatrix} 331{,}31 \\ 428{,}40 \\ 365{,}29 \end{vmatrix}$$

5) Tarmoqlararo oqimlar $x_{ij} = a_{ij}X_j$, sof qiymat esa $Z_j = X_j - \Sigma_i x_{ij}$ ko‘rinishida hisoblanadi. Natijalar 3-jadvalda berilgan.

3-jadval. Tarmoqlararo balans (mlrd so‘m)

Ishlab chiqaruvchi	1-tarmoq	2-tarmoq	3-tarmoq	Oraliq iste’mol	Yakuniy mahsulot	Yalpi mahsulot
1-tarmoq	66,26	128,52	36,53	231,31	100,00	331,31
2-tarmoq	33,13	85,68	109,59	228,40	200,00	428,40
3-tarmoq	99,39	42,84	73,06	215,29	150,00	365,29
Sof qiymat Z_j	132,52	171,36	146,12	–	450,00	–

Tekshirish: $X_1 = 231{,}31 + 100 = 331{,}31$; $X_2 = 228{,}40 + 200 = 428{,}40$; $X_3 = 215{,}29 + 150 = 365{,}29$ – balans bajariladi. Sof qiymatlar yig‘indisi 450 mlrd so‘m yakuniy mahsulot yig‘indisiga (100 + 200 + 150 = 450) teng, bu makroiqtisodiy balans (ishlab chiqarish va taqsimlash usullari bo‘yicha YaIM tengligi) bilan mos keladi.



3-rasm. Tarmoqlar bo‘yicha yalpi mahsulotning tarkibi (2-misol)

6) *Tahlil.* Sanoatning yakuniy mahsuloti 100 dan 110 mlrd so‘mga oshsa, $\Delta Y = (10; 0; 0)^T$ va $\Delta X = (E - A)^{-1}\Delta Y$ teskari matrisaning birinchi ustunini 10 ga ko‘paytirish bilan topiladi: $\Delta X = (14{,}81; 4{,}13; 6{,}07)^T$. Ya’ni sanoat yakuniy talabining har 1 birlik o‘sishi sanoatning o‘zida 1,481 birlik, qishloq xo‘jaligida 0,413 va xizmatlarda 0,607 birlik qo‘shimcha ishlab chiqarishni talab qiladi (to‘la xarajat koeffitsiyentlari). Yangi yalpi mahsulot: $X = (346{,}12; 432{,}52; 371{,}36)^T$.

3.3. Markov zanjirlari va bozor ulushlarini bashorat qilish

Bozor ishtirokchilari orasida iste’molchilarning o‘tishini tavsiflashda **o‘tish ehtimolliklari matrisasi** $P = (p_{ij})$ ishlatiladi, bunda p_{ij} – bu davrda i-firma mijozi keyingi davrda j-firmani tanlash ehtimoli, har bir satr yig‘indisi 1 ga teng. Agar s_k – k-davrdagi bozor ulushlari satr-vektori bo‘lsa, $s_{k+1} = s_k P$, demak $s_k = s_0 P^k$ [9]. Muntazam zanjir uchun $k \to \infty$ da ulushlar yagona **barqaror taqsimot** π ga intiladi, u $\pi P = \pi$, $\Sigma\pi_i = 1$ sistemadan topiladi.

3-misol.

Bozorda uchta firma (A, B, C) faoliyat yuritadi. Boshlang‘ich bozor ulushlari $s_0 = (0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2)$, o‘tish matrisasi quyidagicha:

$$P = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{vmatrix}$$

Keyingi uch davrdagi ulushlarni va uzoq muddatli (barqaror) ulushlarni toping.

Yechish. 1) Birinchi davrda: $s_1 = s_0P = (0{,}5\cdot0{,}8 + 0{,}3\cdot0{,}2 + 0{,}2\cdot0{,}1;\ 0{,}5\cdot0{,}1 + 0{,}3\cdot0{,}7 + 0{,}2\cdot0{,}2;\ 0{,}5\cdot0{,}1 + 0{,}3\cdot0{,}1 + 0{,}2\cdot0{,}7) = (0{,}480;\ 0{,}300;\ 0{,}220)$. Xuddi shunday $s_2 = (0{,}466;\ 0{,}302;\ 0{,}232)$ va $s_3 = (0{,}4564;\ 0{,}3044;\ 0{,}2392)$. Ikki qadamli o‘tish matrisasi P^2 orqali tekshiramiz: s_0P^2 birinchi komponenti $0{,}5\cdot0{,}67 + 0{,}3\cdot0{,}31 + 0{,}2\cdot0{,}19 = 0{,}466$.

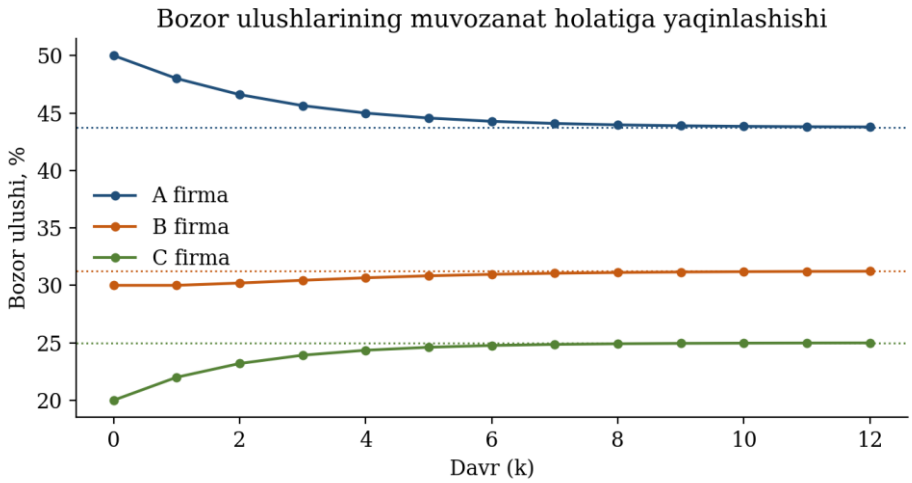
2) Barqaror taqsimot $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ uchun $\pi(P - E) = 0$ va yig‘indi shartidan:

$$-0{,}2\pi_1 + 0{,}2\pi_2 + 0{,}1\pi_3 = 0 \qquad 0{,}1\pi_1 - 0{,}3\pi_2 + 0{,}2\pi_3 = 0 \qquad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Bu sistemani yechib, $\pi = (0{,}4375;\ 0{,}3125;\ 0{,}2500) = (7/16;\ 5/16;\ 1/4)$ ni olamiz. Tekshirish: $-0{,}2\cdot0{,}4375 + 0{,}2\cdot0{,}3125 + 0{,}1\cdot0{,}25 = -0{,}0875 + 0{,}0625 + 0{,}025 = 0$.

4-jadval. Bozor ulushlarining dinamikasi

Davr	A firma	B firma	C firma
k = 0	0,5000	0,3000	0,2000
k = 1	0,4800	0,3000	0,2200
k = 2	0,4660	0,3020	0,2320
k = 3	0,4564	0,3044	0,2392
k = 4	0,4499	0,3066	0,2435
k = 5	0,4456	0,3083	0,2461
k = 10	0,4384	0,3119	0,2497
$k \to \infty$	0,4375	0,3125	0,2500



4-rasm. Bozor ulushlarining barqaror holatga yaqinlashishi (3-misol)

Xulosa. A firma boshlang‘ich 50 % ulushini asta-sekin yo‘qotib, taxminan 43,75 % ga tushadi, B va C firmalar ulushi esa mos ravishda 31,25 % va 25 % gacha o‘sadi. Boshqaruvchi buni mijozlarni ushlab qolish (p_{11}) yoki raqobatchi mijozlarini jalb qilish choralarini ko‘rish zarurligining signali sifatida baholaydi.

3.4. Ko‘p tovarli bozor muvozanati

Uch o‘zaro bog‘liq tovar bozorini qaraymiz. Har bir tovar talabi o‘z narxiga va boshqa tovarlar narxiga bog‘liq (o‘rinbosar tovarlar), taklif esa faqat o‘z narxiga bog‘liq. Muvozanat sharti $Q^d_i = Q^s_i$ ($i = 1, 2, 3$) matrisa ko‘rinishida chiziqli tenglamalar sistemasiga keladi [5, 10].

4-misol.

Talab va taklif funksiyalari berilgan:

$$Q^d_1 = 55 - 3p_1 + p_2 + p_3, \quad Q^s_1 = -20 + 2p_1;$$
$$Q^d_2 = 145 + p_1 - 4p_2 + p_3, \quad Q^s_2 = -30 + 2p_2;$$
$$Q^d_3 = 130 + p_1 + p_2 - 3p_3, \quad Q^s_3 = -10 + 3p_3.$$

Muvozanat narxlari va hajmlarini toping.

Yechish. 1) $Q^d_i = Q^s_i$ tenglikdan sistema hosil bo‘ladi: $5p_1 - p_2 - p_3 = 75$; $-p_1 + 6p_2 - p_3 = 175$; $-p_1 - p_2 + 6p_3 = 140$, ya’ni $Mp = k$:

$$M = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}, \quad p = \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{vmatrix}, \quad k = \begin{vmatrix} 75 \\ 175 \\ 140 \end{vmatrix}.$$

2) *Yagonalik sharti.* M matrisasi qat’iy diagonal ustunlikka ega ($5 > 1+1$; $6 > 1+1$; $6 > 1+1$), shuning uchun $\det M \neq 0$. Determinantni hisoblaymiz: $\det M = 5\cdot(36 - 1) + 1\cdot(-6 - 1) - 1\cdot(1 + 6) = 175 - 7 - 7 = 161$.

3) **Kramer usuli.** Ustunlarni k bilan almashtirib, $\Delta_1 = 4830$, $\Delta_2 = 6440$, $\Delta_3 = 5635$ ni olamiz. Demak, $p_1 = 4830/161 = 30$, $p_2 = 6440/161 = 40$, $p_3 = 5635/161 = 35$.

4) **Teskari matrisa usuli.** Algebraik to‘ldiruvchilar yordamida M simmetrik bo‘lgani uchun:

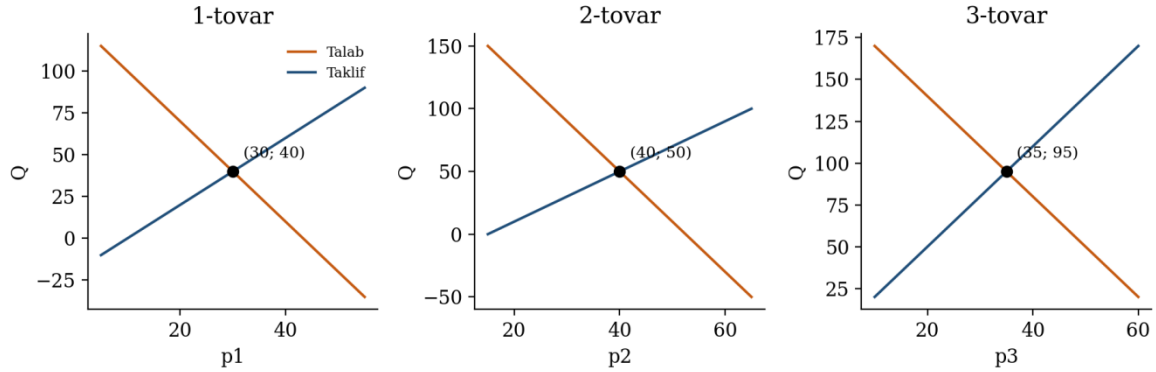
$$M^{-1} = \frac{1}{161}\begin{vmatrix} 35 & 7 & 7 \\ 7 & 29 & 6 \\ 7 & 6 & 29 \end{vmatrix}$$

$$p = M^{-1}k = (1/161)\cdot(35\cdot75 + 7\cdot175 + 7\cdot140;\ 7\cdot75 + 29\cdot175 + 6\cdot140;\ 7\cdot75 + 6\cdot175 + 29\cdot140)^{T} = (30; 40; 35)^{T}.$$

5) Muvozanat hajmlari: $Q_1 = -20 + 2\cdot30 = 40$; $Q_2 = -30 + 2\cdot40 = 50$; $Q_3 = -10 + 3\cdot35 = 95$. Talab tomonidan tekshirish: $Q^d_1 = 55 - 90 + 40 + 35 = 40$; $Q^d_2 = 145 + 30 - 160 + 35 = 50$; $Q^d_3 = 130 + 30 + 40 - 105 = 95$ – tengliklar bajariladi.

5-jadval. Bozor muvozanati natijalari

Tovar	Muvozanat narxi p_i	Muvozanat hajmi Q_i
1-tovar	30	40
2-tovar	40	50
3-tovar	35	95



5-rasm. Talab va taklif chiziqlari hamda muvozanat nuqtalari (4-misol); boshqa tovarlar narxi muvozanat qiymatida qotirilgan

Xulosa. Matrisa usuli tovarlar soni ko‘p bo‘lganda ham bir xil sxema bo‘yicha ishlaydi: M^{-1} bir marta topiladi va keyin turli k (masalan, talab siljishi) uchun yangi narxlar $p = M^{-1}k$ ko‘paytma orqali tezda hisoblanadi.

4. Mavzuni o‘qitishda raqamli vositalardan foydalanish

Ta’limning raqamli transformatsiyasi sharoitida matrisalar nazariyasini o‘qitishdan asosiy maqsad – talabaga faqat hisoblash texnikasini emas, balki iqtisodiy jarayonni matematik model ko‘rinishida ifodalash, natijani iqtisodiy talqin qilish va uni raqamli vosita yordamida tekshirish ko‘nikmasini shakllantirishdir. Yuqorida keltirilgan to‘rtta misolning har biri qo‘lda bajariladigan hisob bilan kompyuterdagi hisob o‘rtasida ko‘prik vazifasini o‘taydi: talaba avval kichik o‘lchamdagi masalani qo‘lda yechib, algoritm mohiyatini tushunadi, so‘ngra xuddi shu masalani elektron jadval yoki dasturlash muhitida bajarib, natijalarni solishtiradi [16, 17]. 7-jadvalda

misollarni MS Excel elektron jadvali va Python dasturlash tilining NumPy kutubxonasida bajarish uchun zarur funksiyalar keltirilgan.

7-jadval. Misollarni raqamli vositalarda bajarish

Misol	MS Excel funksiyalari	Python (NumPy) buyruqlari	Tekshiriladigan natija
1-misol	MMULT	Q @ A, R @ c	S = (95 000; 91 800)
2-misol	MDETERM, MINVERSE, MMULT	np.linalg.det, np.linalg.solve	det(E − A) = 0,412; X ≈ (331,31; 428,40; 365,29)
3-misol	MMULT (ketma-ket qo‘llash)	np.linalg.matrix_power, np.linalg.eig	π = (0,4375; 0,3125; 0,2500)
4-misol	MDETERM, MINVERSE, MMULT	np.linalg.solve	p = (30; 40; 35)

Masalan, 2-misoldagi tarmoqlararo balansni Python muhitida hisoblash uchun quyidagi buyruqlar yetarli:

```
import numpy as np
A = np.array([[0.2,0.3,0.1],[0.1,0.2,0.3],[0.3,0.1,0.2]])
Y = np.array([100, 200, 150])
X = np.linalg.solve(np.eye(3) - A, Y)
print(X)   # [331.31 428.40 365.29]
```

Elektron jadvalning muhim afzalligi shundaki, boshlang‘ich ma’lumot o‘zgartirilganda barcha natijalar avtomatik qayta hisoblanadi. Bu “agar … bo‘lsa, nima bo‘ladi?” turidagi tahlilni – masalan, yakuniy talab, narx yoki o‘tish ehtimolliklari o‘zgarganda iqtisodiy ko‘rsatkichlar qanday o‘zgarishini – darsning o‘zida namoyish etish imkonini beradi. Natijada talaba hisobchi emas, balki tadqiqotchi sifatida faoliyat yuritadi, bu esa uning raqamli va tahliliy kompetensiyalarini rivojlantiradi.

Amaliy tavsiyalar. Tajriba asosida mavzuni o‘qitishda quyidagilarni tavsiya etamiz:

- har bir mavzuni qo‘lda yechiladigan 2×2 yoki 3×3 o‘lchamli masaladan boshlab, so‘ngra katta o‘lchamli (masalan, 10 va undan ortiq tarmoqli) masalalarni kompyuterda yechish bilan davom ettirish;
- qo‘lda va kompyuterda olingan natijalarni solishtirish orqali talabalarda o‘z-o‘zini nazorat qilish odatini shakllantirish;
- rasmiy statistika ma’lumotlari asosida talabalarga mustaqil loyiha topshiriqlari (tarmoqlararo balans, bozor ulushlari tahlili) berish;
- darsdan tashqari mashg‘ulotlar va to‘garaklarda iqtisodiy mazmundagi matrisa masalalari bo‘yicha kichik loyihalar tashkil etish;
- baholashda faqat yakuniy son emas, balki modelning to‘g‘ri tuzilishi va natijaning iqtisodiy talqini ham hisobga olinishi.

5. Natijalar muhokamasi

Ko‘rib chiqilgan to‘rtta masala matrisalar nazariyasining turli bo‘limlariga tayanadi va iqtisodiy amaliyotda turli maqsadlarga xizmat qiladi. 6-jadvalda ular umumlashtirilgan.

6-jadval. Matrisa apparatining iqtisodiy tatbiqlari

Masala	Matematik apparat	Natija	Iqtisodiy qaror
Resurs sarfi (1-misol)	Matrisalar ko‘paytmasi	Resurs ehtiyoji, xarajat	Xaridlarni va byudjetni rejalash
Tarmoqlararo balans (2-misol)	Teskari matrisa $(E-A)^{-1}$	Yalpi mahsulot, sof qiymat	Tarmoqlar rivojini muvofiqlashtirish
Bozor ulushlari (3-misol)	Matrisa darajasi, xos vektor	Barqaror ulushlar	Marketing strategiyasi
Bozor muvozanati (4-misol)	Kramer, teskari matrisa	Muvozanat narxlari	Narx siyosati, soliq ta’siri tahlili

Matrisa usullarining afzalliklari: (a) ma’lumotlarning ixcham va tartibli yozuvi; (b) hisoblashning algoritmikligi – natijani kompyuterda (Excel, Python, MATLAB) osongina olish mumkin; (c) bitta teskari matrisadan turli senariylar uchun foydalanish imkoni. Kamchiliklari: Leontev modeli koeffitsiyentlarining doimiyligi, Markov zanjiri uchun o‘tish ehtimolliklarining vaqt bo‘yicha o‘zgarmasligi kabi soddalashtiruvchi farazlar, shuning uchun real bashoratlarda koeffitsiyentlar muntazam yangilab turilishi lozim [8, 12, 18].

6. Xulosa

1. Matrisalar iqtisodiy ma’lumotlarni jadval shaklida ifodalash va ular ustida amallarni bir butun bajarish uchun universal vosita bo‘lib, matrisalar ko‘paytmasi resurs va xarajatlarni, teskari matrisa esa natijadan sababga o‘tish masalalarini yechadi.
2. Leontev modelida yalpi mahsulot $X = (E - A)^{-1}Y$ formulasi bilan topilib, teskari matrisa elementlari to‘la xarajat koeffitsiyentlari sifatida tarmoqlarning o‘zaro ta’sirini miqdoriy baholaydi (2-misolda sanoat uchun 1,481).
3. Markov zanjiri bozor ulushlari dinamikasini $s_k = s_0P^k$ formulasi bilan bashorat qilib, uzoq muddatli barqaror taqsimotni (7/16; 5/16; 1/4) aniqlash imkonini beradi.
4. Ko‘p tovarli bozor muvozanati narxlari $Mp = k$ sistemasidan Kramer yoki matrisa usuli bilan topiladi; qat’iy diagonal ustunlik yechimning mavjudligi va yagonaligini kafolatlaydi.
5. Keltirilgan misollar o‘quv jarayonida va amaliy iqtisodiy tahlilda matrisa usullarini o‘zlashtirish uchun namuna bo‘la oladi.
6. MS Excel va Python (NumPy) kabi raqamli vositalardan foydalanish hisoblash xatolarini kamaytiradi, turli senariylarni tezkor tahlil qilish imkonini beradi va talabalarning raqamli hamda tahliliy kompetensiyalarini rivojlantiradi; qo‘lda yechish va kompyuterda tekshirishni uyg‘unlashtirish mavzuni o‘qitishning samarali yo‘li hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-son Farmoni.

[2] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 5-oktabrdagi “Raqamli O‘zbekiston – 2030” strategiyasini tasdiqlash va uni samarali amalga oshirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-6079-son Farmoni.

[3] Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[4] Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. – New York: Chelsea Publishing, 1959.

[5] Chiang A.C., Wainwright K. Fundamental Methods of Mathematical Economics. 4th ed. – New York: McGraw-Hill, 2005.

[6] Leontief W. Input-Output Economics. 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1986.

[7] Leontief W. The Structure of American Economy, 1919–1939. 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1951.

[8] Miller R.E., Blair P.D. Input-Output Analysis: Foundations and Extensions. 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[9] Kemeny J.G., Snell J.L. Finite Markov Chains. – Princeton: D. Van Nostrand, 1960.

[10] Simon C.P., Blume L. Mathematics for Economists. – New York: W.W. Norton, 1994.

[11] Intriligator M.D. Mathematical Optimization and Economic Theory. – Philadelphia: SIAM, 2002.

[12] Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2007.

[13] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2005.

[14] Hawkins D., Simon H.A. Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability // Econometrica. – 1949. – Vol. 17, No. 3/4. – P. 245–248.

[15] Gale D. The Theory of Linear Economic Models. – New York: McGraw-Hill, 1960.

[16] Strang G. Linear Algebra and Its Applications. 4th ed. – Belmont: Brooks/Cole, 2006.

[17] Harris C.R., Millman K.J., van der Walt S.J. et al. Array programming with NumPy // Nature. – 2020. – Vol. 585. – P. 357–362.

[18] Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Дело и сервис, 2001.