HASSAN–SEN ALMASHTIRISHLARINI QO'LLASH ORQALI ZARYADLANGAN GRAVITATSION YECHIMLARNI HOSIL QILISH METODOLOGIYASI

Xamroyev Yoqubjon Xayitboyevich
Samarqand agroinnovatsiyalar va tadqiqotlar instituti katta o'qituvchisi
Tel.: +998 94 470 84 08

DOI: ***https://doi.org/10.5281/zenodo.24415215***

Annotatsiya. *Maqolada muqobil gravitatsiya nazariyalarida aniq yechimlarni hosil qilishning matematik metodlaridan biri – Hassan–Sen almashtirishlarini qo'llash metodologiyasi tadqiq etiladi. Eynshteyn tenglamalarining statik va o'qiy simmetriyali vakuum yechimlariga Hassan–Sen almashtirishlarini qo'llash orqali geterotik torlar nazariyasining past energiyali samarali maydon nazariyasida zaryadlangan gravitatsion yechimlarni qurish bosqichlari ketma-ket bayon qilinadi. Usulning matematik mohiyati Zipoy–Voorhees metrikasi misolida yoritilib, zaryad parametri kiritilishi natijasida metrik tensor, dilaton va elektromagnit maydonlarning o'zgarishi tahlil qilinadi. Olingan yechimning xususiy hollari – Zipoy–Voorhees, GMGHS va Schwarzschild metrikalariga o'tishi analitik tekshirilgan.*

Kalit so'zlar: *Hassan–Sen almashtirishlari, muqobil gravitatsiya nazariyasi, Zipoy–Voorhees metrikasi, geterotik torlar nazariyasi, vakuum yechimi, zaryadlangan fazo-vaqt, dilaton maydoni, aniq yechimlar.*

Аннотация. *В статье исследуется методология применения преобразований Хассана–Сена – одного из математических методов построения точных решений в альтернативных теориях гравитации. Последовательно излагаются этапы построения заряженных гравитационных решений в низкоэнергетической эффективной теории поля гетеротической теории струн путём применения преобразований Хассана–Сена к статическим аксиально-симметричным вакуумным решениям уравнений Эйнштейна. Математическая сущность метода раскрыта на примере метрики Зипоя–Вурхиза; проанализировано изменение метрического тензора, дилатонного и электромагнитного полей при введении параметра заряда. Аналитически проверены частные случаи полученного решения — переход к метрикам Зипоя–Вурхиза, GMGHS и Шварцшильда.*

Ключевые слова: *преобразования Хассана–Сена, альтернативная теория гравитации, метрика Зипоя–Вурхиза, гетеротическая теория струн, вакуумное решение, заряженное пространство-время, дилатонное поле, точные решения.*

Abstract. *The paper studies the methodology of applying the Hassan–Sen transformations, one of the mathematical methods for generating exact solutions in alternative theories of gravity. The steps for constructing charged gravitational solutions in the low-energy effective field theory of heterotic string theory, by applying the Hassan–Sen transformations to static axially symmetric vacuum solutions of the Einstein equations, are presented in sequence. The mathematical essence of the method is illustrated with the Zipoy–Voorhees metric, and the changes in the metric tensor, the*

© **Namangan davlat pedagogika instituti** | **Tabiiy fanlar kafedrasi**
© "**Smart Quill Publishing" nashriyoti** | **www.smartquillpublishing.uz**

dilaton and the electromagnetic field caused by introducing the charge parameter are analyzed. The special cases of the resulting solution, namely the reduction to the Zipoy–Voorhees, GMGHS and Schwarzschild metrics, are verified analytically.

Keywords: *Hassan–Sen transformations, alternative theory of gravity, Zipoy–Voorhees metric, heterotic string theory, vacuum solution, charged spacetime, dilaton field, exact solutions.*

Kirish

Zamonaviy nazariy fizikada gravitatsion maydonning aniq yechimlarini topish va ularning fizik xususiyatlarini o‘rganish muhim ilmiy masalalardan biri hisoblanadi. Umumiy nisbiylik nazariyasida Eynshteyn maydon tenglamalarining vakuum yechimlari turli fazo-vaqt geometriyalarini tavsiflash imkonini beradi. Ular orasida statik, aksial simmetriyali Zipoy–Voorhees yechimi (γ-metrika) alohida o‘rin tutadi: u deformatsiya parametri γ orqali Schwarzschild metrikasini umumlashtiradi va sferik bo‘lmagan kompakt obyektlarni modellashtirishda qo‘llaniladi [1, 2]. Biroq gravitatsion maydonni elektromagnit va skalyar maydonlar bilan o‘zaro bog‘liq holda o‘rganish muqobil gravitatsiya nazariyalarining rivojlanishida alohida ahamiyat kasb etadi. Geterotik torlar nazariyasining past energiyali chegarasida gravitatsion maydon metrik tensor, elektromagnit maydon, dilaton maydoni hamda antisimmetrik Kalb–Ramond tensor maydoni orqali ifodalanadi. Bunday nazariyaning maydon tenglamalari nochiziqli bo‘lgani uchun ularning aniq yechimlarini to‘g‘ridan-to‘g‘ri integrallash juda murakkab. Shu sababli, mavjud vakuum yechimlari asosida yangi zaryadlangan gravitatsion yechimlarni hosil qilish usullari muhim ilmiy ahamiyat kasb etadi. Ana shunday usullardan biri – S.F.Hassan va A.Sen tomonidan taklif etilgan almashtirishlar bo‘lib, ular fazo-vaqt koordinatalarining bir qismiga bog‘liq bo‘lmagan yechimlar uchun maydon tenglamalarining simmetriyasiga asoslanadi [3]. A.Sen ushbu usul yordamida Kerr metrikasidan geterotik torlar nazariyasida aylanuvchi zaryadlangan qora tuynuk yechimini qurgan [4]. Zipoy–Voorhees metrikasining zaryadlangan umumlashmalari so‘nggi yillarda faol o‘rganilmoqda. Xususan, Eynshteyn–Maksvell nazariyasidagi zaryadlangan Zipoy–Voorhees metrikasi [6] va torlar nazariyasidagi zaryadlangan analogi [7] taklif etilgan. Mazkur maqolaning maqsadi – Hassan–Sen almashtirishlari yordamida vakuum yechimidan zaryadlangan yechim hosil qilish metodologiyasini bosqichma-bosqich bayon etish, uni Zipoy–Voorhees metrikasi misolida ko‘rsatish va olingan natijaning to‘g‘riligini xususiy hollar orqali tekshirishdir.

Tadqiqot metodologiyasi

Hassan–Sen almashtirishlarining asosiy mohiyati umumiy nisbiylik nazariyasidagi ma’lum vakuum yechimini geterotik torlar nazariyasining past energiyali samarali maydon tenglamalarini qanoatlantiruvchi yangi yechimga o‘tkazishdan iborat [3, 4]. Bunda boshlang‘ich gravitatsion yechimga elektromagnit, dilaton va antisimmetrik tensor maydonlari kiritiladi. Metodologiya quyidagi bosqichlardan iborat.

1-bosqich: boshlang‘ich yechimni tanlash. Eynshteyn vakuum tenglamalarining

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (1)$$

yechimi bo‘lgan statik metrika tanlanadi va u $\tilde{g}_{\mu\nu}$ bilan belgilanadi. Hassan–Sen almashtirishlari qo‘llanilishi natijasida quyidagi maydonlar to‘plami hosil qilinadi:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \rightarrow \{G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, A_\mu, \Phi\}, \qquad (2)$$

bu yerda $G_{\mu\nu}$ – torlar sistemasidagi metrik tensor, $B_{\mu\nu}$ – Kalb–Ramond maydoni, A_μ – elektromagnit potensial, Φ – dilaton maydoni.

2-bosqich: yordamchi funksiyani kiritish. Boshlang'ich metrikaning vaqt komponenti $\tilde{g}_{tt}$ bo'lsin. Almashtirish jarayonida quyidagi yordamchi funksiya kiritiladi:

$$\Lambda = 1 + s^2(1 + \tilde{g}_{tt}), \qquad (3)$$

bu yerda s – zaryad bilan bog'liq almashtirish parametri. $s = 0$ bo'lganda $\Lambda = 1$ bo'lib, almashtirish ayniy almashtirishga aylanadi.

3-bosqich: yangi maydonlarni aniqlash. Torlar sistemasidagi metrik tensorning vaqt komponenti, elektromagnit potensial va dilaton maydoni quyidagicha aniqlanadi:

$$G_{tt} = \frac{\tilde{g}_{tt}}{\Lambda^2}, \qquad A_t = \frac{s\sqrt{1+s^2}}{\Lambda}(1 + \tilde{g}_{tt}), \qquad \Phi = -\ln\Lambda. \qquad (4)$$

Statik boshlang'ich yechim uchun antisimmetrik tensor maydoni nolga teng bo'ladi ($B_{\mu\nu} = 0$), fazoviy metrik komponentlar esa o'zgarmaydi.

4-bosqich: Eynshteyn sistemasiga o'tish. Torlar sistemasidagi metrikadan Eynshteyn sistemasiga konformal almashtirish orqali o'tiladi:

$$g_{\mu\nu} = e^{-\Phi} G_{\mu\nu}. \qquad (5)$$

Yuqoridagi (4) va (5) formulalardan Eynshteyn sistemasidagi vaqt komponenti uchun sodda ifoda kelib chiqadi:

$$g_{tt} = \Lambda\, G_{tt} = \frac{\tilde{g}_{tt}}{\Lambda}. \qquad (6)$$

Shunday qilib, to'rt bosqichli algoritm har qanday statik vakuum yechimidan zaryadlangan gravitatsion fazo-vaqt yechimini analitik tarzda hosil qilish imkonini beradi.

Natijalar va muhokama

Metodologiyani Zipoy–Voorhees fazo-vaqtiga qo'llaymiz [1, 2]. Bu metrika statik, aksial simmetriyali vakuum yechim bo'lib, uning geometrik xususiyatlari γ deformatsiya parametri orqali tavsiflanadi. Boshlang'ich metrikaning vaqt komponenti

$$\tilde{g}_{tt} = -\left(1 - \frac{2m}{\gamma r}\right)^{\gamma} \qquad (7)$$

ko'rinishga ega. Uni (3) ga qo'yib, yordamchi funksiyani topamiz:

$$\Lambda = 1 + s^2\left[1 - \left(1 - \frac{2m}{\gamma r}\right)^{\gamma}\right]. \qquad (8)$$

Parametrlarni fizik kattaliklar bilan bog'lash uchun quyidagi belgilashlar kiritiladi [7]:

$$m = M - b, \qquad s^2 = \frac{b}{M-b}, \qquad b = \frac{Q^2}{2M}, \qquad (9)$$

bu yerda M – umumiy massa, Q – elektr zaryadi, b – zaryad parametri. Almashtirishdan keyin radial koordinata $r \rightarrow r - 2b$ ko'rinishida qayta aniqlanadi. Natijada geterotik torlar nazariyasining past energiyali samarali maydon nazariyasida zaryadlangan Zipoy–Voorhees fazo-vaqti hosil bo'ladi.

Olingan yechimning to‘g‘riligini uning xususiy hollari orqali tekshiramiz.
1. $b = 0$ bo‘lganda (9) ga ko‘ra $s = 0$, $m = M$, demak $\Lambda = 1$, $\Phi = 0$, $A_t = 0$ bo‘lib, boshlang‘ich Zipoy–Voorhees metrikasi tiklanadi.
2. $\gamma = 1$ bo‘lganda $1 + \tilde{g}_{tt} = 2m/r$ va $s^2 m = b$ bo‘lgani uchun $\Lambda = 1 + 2b/r$ bo‘ladi. U holda (6) dan

$$g_{tt} = -\frac{1 - 2m/r}{1 + 2b/r}. \qquad (10)$$

$r \to r - 2b$ almashtirishdan keyin $m + b = M$ ekanligini hisobga olsak,

$$g_{tt} = -\frac{r - 2b - 2m}{r} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad (11)$$

ifoda hosil bo‘ladi. Bu esa Gibbons–Maeda–Garfinkle–Horowitz–Strominger (GMGHS) dilatonli qora tuynuk yechimining vaqt komponentiga mos keladi [5]. Dilaton maydoni bu holda $e^{-\Phi} = 1 + 2b/r$ ko‘rinishni oladi va $r \to \infty$ da nolga intiladi.
3. $\gamma = 1$ va $b = 0$ bo‘lganda yechim Schwarzschild metrikasiga qaytadi.
Bundan tashqari, katta masofalarda $(1 - 2m/\gamma r)^{\gamma} \approx 1 - 2m/r$ bo‘lgani uchun ixtiyoriy γ da $g_{tt} \approx -(1 - 2M/r)$ bo‘ladi, ya’ni olingan fazo-vaqtning asimptotik (ADM) massasi M ga teng va u zaryad kiritilishi bilan o‘zgarmaydi. Xususiy hollarning to‘g‘ri tiklanishi va asimptotik xossa algoritmning ichki muvofiqligini tasdiqlaydi.
Shuni ta’kidlash lozimki, Eynshteyn–Maksvell nazariyasidagi zaryadlangan Zipoy–Voorhees metrikasi [6] va bu yerda qurilgan torlar nazariyasidagi yechim [7] turli maydon tenglamalarining yechimlari bo‘lib, ular dilaton maydonining mavjudligi bilan farqlanadi. Shu sababli olingan yechimning to‘liq to‘g‘riligi barcha maydonlarning geterotik torlar nazariyasining past energiyali tenglamalarini qanoatlantirishini bevosita tekshirish orqali tasdiqlanadi. Bunday tekshirishni kompyuter algebrasi tizimlari (Maple, Mathematica, Python SymPy) yordamida bajarish qulay va ishonchlidir.

Xulosa va tavsiyalar

Hassan–Sen almashtirishlari muqobil gravitatsiya nazariyalarida aniq yechimlarni hosil qilishning samarali matematik metodlaridan biri hisoblanadi. Maqolada ushbu metodni statik vakuum yechimlariga qo‘llash to‘rt bosqichli algoritm ko‘rinishida bayon etildi: boshlang‘ich yechimni tanlash, yordamchi funksiyani kiritish, yangi maydonlarni aniqlash va Eynshteyn sistemasiga o‘tish. Zipoy–Voorhees metrikasiga mazkur almashtirishlarni qo‘llash natijasida massa, elektr zaryadi va deformatsiya parametrlariga bog‘liq yangi gravitatsion yechim hosil qilindi. Olingan yechim $b = 0$ da Zipoy–Voorhees, $\gamma = 1$ da GMGHS va $\gamma = 1$, $b = 0$ da Schwarzschild metrikalariga o‘tishi analitik ko‘rsatildi, uning asimptotik massasi zaryad parametriga bog‘liq emasligi aniqlandi. Tadqiqot natijalari asosida quyidagi tavsiyalar beriladi: 1) bayon etilgan algoritmdan boshqa statik vakuum yechimlarining (masalan, Weyl sinfidagi metrikalarning) torlar nazariyasidagi zaryadlangan analoglarini qurishda foydalanish mumkin; 2) hosil qilingan yechimlarni maydon tenglamalariga qo‘yib tekshirishda kompyuter algebrasi tizimlaridan foydalanish tavsiya etiladi; 3) olingan zaryadlangan fazo-vaqtlarda zarralar harakati, eng ichki barqaror aylana orbita va gravitatsion

linzalanishni o‘rganish orqali muqobil gravitatsiya nazariyalarini astrofizik kuzatuvlar bilan solishtirish mumkin; 4) tadqiqot natijalaridan oliy ta’limda nazariy fizika va gravitatsiya nazariyasi bo‘yicha maxsus kurslarni o‘qitish jarayonida maydon tenglamalarining aniq yechimlarini hosil qilish usullarini o‘rgatishda foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Zipoy D.M. Topology of some spheroidal metrics // Journal of Mathematical Physics. – 1966. – Vol. 7, No. 6. – P. 1137.

2. Voorhees B.H. Static axially symmetric gravitational fields // Physical Review D. – 1970. – Vol. 2, No. 10. – P. 2119.

3. Hassan S.F., Sen A. Twisting classical solutions in heterotic string theory // Nuclear Physics B. – 1992. – Vol. 375. – P. 103.

4. Sen A. Rotating charged black hole solution in heterotic string theory // Physical Review Letters. – 1992. – Vol. 69. – P. 1006–1009.

5. Garfinkle D., Horowitz G.T., Strominger A. Charged black holes in string theory // Physical Review D. – 1991. – Vol. 43, No. 10. – P. 3140–3143.

6. Gurtug O., Halilsoy M., Mangut M. The charged Zipoy–Voorhees metric with astrophysical applications // The European Physical Journal C. – 2022. – Vol. 82. – Article 671.

7. Yunusov O., Turimov B., Khamroev Y., Usanov S., Turaev F., Kuliyeva M. Charged Zipoy–Voorhees metric in string theory // Annals of Physics. – 2025. – Vol. 481. – Article 170151. – https://doi.org/10.1016/j.aop.2025.170151

© **Namangan davlat pedagogika instituti** | **Tabiiy fanlar kafedrasi**
© “**Smart Quill Publishing” nashriyoti** | **www.smartquillpublishing.uz**