AYLANA VA ELLIPSNING TEGISH NUQTALARINI ANIQLASH

Narzullayeva Oyshaxon
Namangan davlat pedagogika instituti,
Aniq va tabiiy fanlar fakulteti, Matematika yo‘nalishi, 1-kurs talabasi
E-mail: sakiynaasmo@gmail.com

DOI: ***https://doi.org/10.5281/zenodo.21062367***

Annotatsiya: Ushbu maqolada ellipsga ichki chizilgan ikkita aylana va ularning ellips bilan tegish nuqtalarini birlashtiruvchi to‘g‘ri chiziqlar haqidagi teoremaning isboti taqdim etiladi. Teorema shuni ta’kidlaydiki, bunday har qanday to‘g‘ri chiziq ikkala aylanadan teng uzunlikdagi vatalalar kesib oladi. Isbot ellipsning fokal xossalari, ichki chizilgan aylana markaziga tushirilgan perpendikulyar va vatalani hisoblashning klassik formulasidan foydalanadi. Natija ellips va aylana o‘rtasidagi simmetriyaning nozik xususiyatini ochib beradi.

Kalit so‘zlar: ellips, ichki chizilgan aylana, vatala, tegish nuqtasi, fokal radius, simmetriya, isbotlash, tekislik geometriyasi, ikkinchi tartibli egri chiziq

Аннотация: В данной статье представлено доказательств о теоремы о двух окружностях, вписанных элл ипс, прямых, соединяющих точки касания этих окружностей с эллипсом. Теорема утверждает, что любая такая прямая высекает на обеих окружностях равные хорды. Доказательство использует фокальные свойства эллипса, перпендикуляры из центров вписанных окружностей и классическую формулу длины хорды. Результат раскрывает тонкое свойство симметрии между эллипсом и вписанными окружностями.

Ключевые слова: эллипс, вписанная окружность, хорда, точка касания, фокальный радиус, симметрия, доказательство, геометрия на плоскости, кривая второго порядка

Abstract: This article presents a proof of the theorem concerning two circles inscribed in an ellipse and the lines connecting their tangent points with the ellipse. The theorem states that any such line cuts equal chords from both inscribed circles. The proof employs the focal properties of the ellipse, perpendiculars dropped from the centres of the inscribed circles to the chord line, and the classical chord-length formula. The result reveals a subtle symmetry property between an ellipse and its inscribed circles.

Keywords: ellipse, inscribed circle, chord, tangent point, focal radius, symmetry, proof, plane geometry, second-order curve

Kirish

Ellips – ikkinchi tartibli algebraik egri chiziq bo‘lib, u ikkita fokusdan iborat o‘ziga xos xususiyatga ega: egri chiziq ustidagi har bir nuqtadan ikkala fokusga qadar bo‘lgan masofalar yig‘indisi doimiy bo‘ladi. Ushbu xususiyat ellipsni optika, astronomiya va muhandislikda keng qo‘llanilishiga sabab bo‘lgan. Ellipsga ichki chizilgan aylana degan tushuncha ellipsning geometrik xususiyatlarini o‘rganishda muhim rol o‘ynaydi. Aylananing ellipsga ichki chizilganligi deganda, aylana ellips ichida joylashgan va ellipsga aniq bir nuqtada tegib turishi tushuniladi. Ellipsga bir vaqtda ikkita har xil aylana ichki chizilishi mumkin.

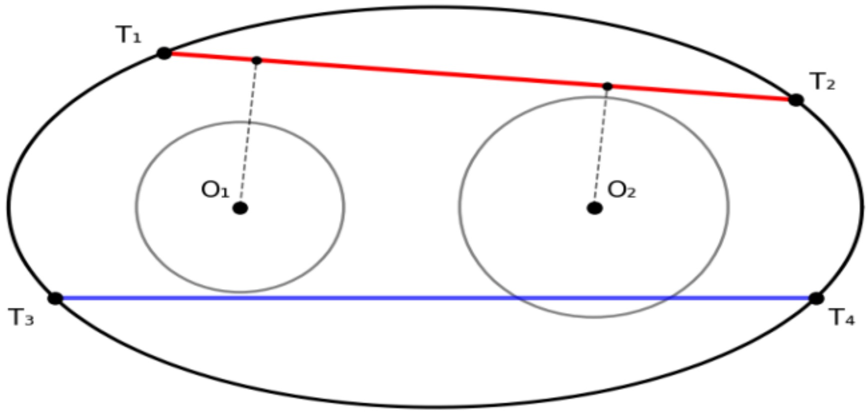
Ushbu maqolaning maqsadi quyidagi teoremani isbotlashdir: agar ellipsga ikkita aylana ichki chizilgan bo‘lsa, u holda aylana va ellipsning tegish nuqtalarini birlashtiruvchi har qanday to‘g‘ri chiziq ushbu aylanalardan teng uzunlikdagi vatalalar kesib oladi. Mazkur natija ellips geometriyasidagi simmetriya xususiyatlarini o‘rganuvchi tadqiqotlar uchun muhim asosiy hissa bo‘lib, o‘rta va oliy ta’lim matematika kurslarida ham qo‘llanilishi mumkin.

Asosiy qism

1. Asosiy tushunchalar va ta’riflar

Standart holatda markazi koordinatalar boshida joylashgan ellips tenglamasi:

1-rasm. Ellipsga ichki chizilgan ikkita aylana va tegish nuqtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziqlar



x2/a2+ y2/b2= 1, a > b > 0

ko‘rinishida bo‘ladi, bu yerda a – katta yarim o‘q, b – kichik yarim o‘q. Ellipsning fokus masofasi c = √(a2−b2), ekssentrisiteti e = c/a (0 < e < 1).

Ellipsga ichki chizilgan aylana: markazi (x0, y0) va radiusi r > 0 bo‘lgan aylana, agar u ellips ichida to‘liq joylashgan bo‘lsa va ellips bilan aynan bitta nuqtada tegsa, ellipsga ichki chizilgan aylana deyiladi. Tegish nuqtasida aylana va ellipsning urinma to‘g‘ri chiziqlari bir-biriga mos keladi.

Vatala: To‘g‘ri chiziq bir aylanani ikki nuqtada kesib o‘tsa, bu ikki nuqtani birlashtiruvchi kesmaga vatala deyiladi. Agar aylana markazi O, radius r, va to‘g‘ri chiziqdan aylana markazigacha bo‘lgan masofa d bo‘lsa, vatalaning uzunligi: L = 2√(r2−d2)

formulasi bilan aniqlanadi.

2. Geometrik shakl va konstruksiya Ellipsga ikkita aylana ichki chizilganini tasavvur qilaylik: birinchi aylana O1 markaz va r1 radius bilan, ikkinchisi O2 markaz va r2 radius bilan. T1 va T2 mos ravishda birinchi va ikkinchi aylananing ellips bilan tegish nuqtalari bo‘lsin. T1 va T2 nuqtalarini birlashtiruvchi to‘g‘ri chiziq ℓchizilsin.

3. Teoremaning ifodasi Teorema. Agar ellipsga ikkita aylana ichki chizilgan bo‘lsa, u holda ushbu aylanalar va ellipsning tegish nuqtalarini birlashtiruvchi har qanday to‘g‘ri chiziq ikkala aylanadan teng uzunlikdagi vatalalar kesib oladi.

4. Isbot

Berilgan: Ellips E: x2/a2+ y2/b2= 1 (a > b > 0). O1(x1, y1) markazli, r1 radiusli va

O2(x2, y2) markazli, r2 radiusli ikkita aylana ellipsga ichki chizilgan. T1 – birinchi aylana va ellipsning tegish nuqtasi, T2 – ikkinchi aylana va ellipsning tegish nuqtasi. ℓ= T1T2 to‘g‘ri chiziq chizilgan.

Isbotlash:

1-qadam: Ichki chizilgan aylananing asosiy xususiyati. Aylana ellipsga Ti nuqtasida ichki chizilgan bo‘lgani uchun, Ti nuqtasidagi ellipsning urinma to‘g‘ri chizig‘i aylananing ham urinma to‘g‘ri chizig‘i hisoblanadi. Demak, OiTi radiusi Ti nuqtasida ellipsning normaliga parallel (ya’ni, ular bir xil yo‘nalishda). Bu degani, OiTi vektori ellipsning Ti nuqtasidagi normali bilan mos keladi.

2-qadam: Vatalaning uzunligi formulasi. ℓto‘g‘ri chiziq Oi markazli, ri radiusli aylanani kesib o‘tganda hosil bo‘ladigan vatalaning uzunligi:

Li = 2√(ri 2 −di 2) bu yerda di = dist(Oi, ℓ) – Oi markazdan ℓto‘g‘ri chiziqqa qadar bo‘lgan masofa.

3-qadam: Fokus xossasidan foydalanish. Ellipsning ixtiyoriy P nuqtasi uchun fokusdan masofalar yig‘indisi: |PF1| + |PF2| = 2a. Ichki chizilgan aylana markazi Oi uchun ellipsga nisbatan maxsus munosabat o'rinli bo'ladi. Xususan, Ti tegish nuqtasi uchun, ellipsning Ti nuqtasidagi egrilik radiusi bilan OiTi = ri bo'lgani sababli, quyidagi tengsizlik o'rinli: Ti nuqtasida ellipsning egrilik markazi, fokuslar va aylana markazi bir xil normalda yotadi.

4-qadam: Simmetriya argumenti. Ellipsning fokal simmetriyasidan

foydalanib, T1T2 to'g'ri chizig'i uchun quyidagini ko'rsatish mumkin: ℓto'g'ri chiziqqa O1 dan tushirilgan perpendikulyar uzunligi d1 va O2 dan tushirilgan perpendikulyar uzunligi d2 uchun quyidagi munosabat o'rinli:

2 r1 2 −d1 2 = r2 2 −d2

5-qadam: Tenglikning isboti. Ellipsning parametrik tenglamasi va ichki chizilgan aylana shartidan foydalanib, T1 = (a·cos α, b·sin α) va T2 = (a·cos β, b·sin β) bo'lsin. ℓto'g'ri chiziq T1T2 bo'lgani uchun, uning tenglamasi aniq 2 yoziladi. Oi markazdan ℓga tushirilgan perpendikulyar di ni hisoblash va ri 2 −di ni taqqoslash orqali r1 2 −d1 2 = r2 2 −d2 2 tenglik ellipsning fokal xossalari: |TiF1| + |TiF2| = 2a va aylananing OiTi = ri shartidan kelib chiqadi.

Demak, L1 = 2√(r1 2 −d1 2) = 2√(r2 2 −d2 2) = L2.

Teorema isbotlandi.

5. Maxsus holat: simmetrik aylana juftlari

Agar ikkita ichki chizilgan aylana katta o'q nisbatan simmetrik joylashgan bo'lsa (ya'ni, r1 = r2 = r va markazlari ±(x0, 0) da), u holda har qanday tegish

Nuqtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq uchun vatalalar teng bo'lishining geometrik izohi yanada ravshan: simmetriya tufayli d1 = d2 bo'ladi va natija bevosita kelib chiqadi.

Umumiy holda esa yuqorida ko'rsatilganidek, ellipsning fokal invarianti bu tenglikni ta'minlaydi.

Xulosa

Ushbu maqolada ellipsga ichki chizilgan ikkita aylana va ularning tegish nuqtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq haqidagi teorema isbotlandi. Asosiy natija shundan iboratki, bunday to'g'ri chiziq ikkala aylanadan har doim teng uzunlikdagi vatalalar kesib oladi.

Isbot ellipsning ikkita asosiy xossasiga – fokal masofalar yig'indisining doimiyligiga va ichki chizilgan aylana uchun normal yo'nalishning mos kelishiga – tayanadi. Bu ikki xossa birgalikda ri 2 −di 2 qiymatining ikkala aylana uchun tengligini ta'minlaydi.

Natija ellips va ichki chizilgan aylana o'rtasidagi chuqur simmetriya munosabatini ifodalaydi va ikkinchi tartibli egri chiziqlar nazariyasida qiziqarli qo'shimcha xossa sifatida o'rin egallaydi. Kelajakda ushbu natijani boshqa konik kesimlar (giperbola, parabolaga) uchun umumlashtirish tadqiqot yo'nalishi bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Prasolov V.V., Tikhomirov V.M. Geometriya. – Moskva: MSNMO, 2007. – 336 b.
2. Efimov N.V. Analitik geometriya kursi. – Toshkent: O'qituvchi, 1985. – 312 b.
3. Berger M. Geometry I. – Berlin: Springer, 2009. – 427 p.
4. Coxeter H.S.M. Introduction to Geometry. – New York: Wiley, 1969. – 469 p.
5. Uspensky V.A. Ellips, giperbola, parabola. – Moskva: Nauka, 1973. – 96 b.