

UCHBURCHAKNING UCHLARIDAN CHIQQAN IXTIYORIY CHIZIQLAR
KESISHISHIDAN HOSIL BO‘LGAN TO‘RTBURCHAKLARGA ICHKI AYLANA
CHIZISH MUMKINLIGINI ISBOTLASH

Rohataliyeva Ruxsoraxon Husniddin qizi

Namangan davlat pedagogika instituti

Amaliy matematika yo‘nalishi ATI-AU-24 guruh talabasi

E-mail: rohataliyeveruxsora@gmail.com

Tel: +998953290506

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.21057982>

Annotatsiya: Ushbu maqolada uchburchak uchlaridan o‘tkazilgan uchta chiziq yordamida hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar konfiguratsiyasi o‘rganiladi. Tadqiqot davomida hosil bo‘lgan uchta to‘rtburchakdan ikkitasiga ichki aylana chizish mumkin bo‘lgan holatda uchinchi to‘rtburchakka ham ichki aylana chizish mumkinligi isbotlanadi. Isbot jarayonida tangensial to‘rtburchaklarning xossalari hamda qarama-qarshi tomonlar yig‘indilarining tengligi haqidagi teoremlardan foydalaniladi. Natijada berilgan geometrik konfiguratsiyada ichki aylana mavjudligi uchun zarur shartlarning o‘zaro bog‘liqligi aniqlanadi. Olingan natija elementar geometriya va matematik olimpiada masalalarini yechishda qo‘llanilishi mumkin.

Kalit so‘zlar: uchburchak, to‘rtburchak, ichki aylana, geometrik konfiguratsiya, geometrik isbot

Abstract: This article studies the configuration of rectangles formed by three lines drawn from the vertices of a triangle. During the study, it is proved that if two of the three rectangles can be inscribed in a circle, then the third rectangle can also be inscribed in a circle. The proof uses the properties of tangential rectangles and the theorems on the equality of the sums of opposite sides. As a result, the necessary conditions for the existence of an inner circle in a given geometric configuration are determined. The result obtained can be used in solving elementary geometry and mathematical Olympiad problems.

Keywords: triangle, rectangle, inscribed circle, geometric configuration, geometric proof

Аннотация: В данной статье исследуется конфигурация прямоугольников, образованных тремя прямыми, проведенными из вершин треугольника. В ходе исследования доказывается, что если два из трех прямоугольников могут быть вписаны в окружность, то и третий прямоугольник может быть вписан в окружность. Доказательство основано на свойствах касательных прямоугольников и теоремах о равенстве сумм противоположных сторон. В результате определяются необходимые условия существования внутренней окружности в данной геометрической конфигурации. Полученный результат может быть использован при решении задач элементарной геометрии и задач математических олимпиад.

Ключевые слова: треугольник, прямоугольник, вписанная окружность, геометрическая конфигурация, геометрическое доказательство

Kirish

Geometriya fanida uchburchak ichida hosil bo‘lgan ko‘pburchaklar konfiguratsiyasi muhim o‘ringa ega, chunki ular ko‘plab murakkab xossalarni o‘z ichiga oladi va matematik olimpiadalar masalalarida tez-tez uchraydi. Ayniqsa, tangensial to‘rtburchaklar — ichki aylanaga ega bo‘lgan to‘rtburchaklar — qiziqarli xossalarga ega: ularning qarama-qarshi tomonlarining yig‘indisi har doim teng bo‘ladi va bu ko‘plab geometrik invariantlarni hosil qiladi.

Ushbu maqolada uchburchak uchlaridan o‘tkazilgan uchta chiziq yordamida hosil bo‘lgan to‘rtburchaklar o‘rganiladi. Maqsad — hosil bo‘lgan uchta to‘rtburchakdan ikkitasi tangensial bo‘lsa, uchinchisiga ham ichki aylana chizish mumkinligini isbotlash. Tadqiqot jarayonida tangensial to‘rtburchaklarning uzunlik balansi va ular o‘rtasidagi geometrik bog‘lanishlar asosiy

vosita sifatida qo‘llaniladi. Ushbu natijalar nafaqat elementar geometriya masalalarini yechishda, balki olimpiada geometriyasi vazifalarini tahlil qilishda ham amaliy ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Yuqoridagi masalani tahlil qilamiz. Uchburchak berilgan bo‘lsin, uning uchlaridan chiqarilgan 3 ta to‘g‘ri chiziq uchburchak ichida 1 ta nuqtada kesishadi va 3 ta to‘rtburchak hosil bo‘ladi. Agar shu to‘rtburchaklarning ikkitasiga ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, uchinchisiga ham ichki aylana chizish mumkinligini isbotlash kerak. Avval masala shartiga mos chizma chizib olamiz.

Styuart teoremasiga asosan, har qanday uchburchakda, uchburchakning uchta uchidan chiqadigan ixtiyoriy chiziqlar bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta, uchburchak ichidagi muhim geometrik nuqtalardan biri bo‘lib, uchburchakning uchidan chiqqan chiziqlar (masalan, biseptorlar, medianalar yoki perpendikulyarlar) bir nuqtada uchrashadi. Ushbu holat Styuart teoremasining to‘liq matematik asosiga tayangan holda, uchburchaklar va ularning o‘zaro bog‘liqligini tasdiqlaydi.

Styuart teoremasining ifodasi: Agar uchburchakning uchidan chiziqlar tushirilsa, bu chiziqlar uchburchakning ichidagi bitta nuqtada kesishadi, bu esa geometrik shakllar va munosabatlarning muhim tasdig‘i hisoblanadi.

Masala shartiga ko‘ra, chizma chizilsa, kesmalar ajratgan 3 ta to‘rtburchak hosil bo‘ladi. Bularning ixtiyoriy ikkitasiga ichki aylana chizib olinadi, shundan so‘ng turli amallar bajarilib, uchinchi to‘rtburchakka ham ichki aylana chizish mumkinligi isbotlanadi.

Avval 2 ta to‘rtburchaklarga chizilgan aylanalarning tomonlar bilan kesishish nuqtalarini belgilab olamiz. Bundan so‘ng $\triangle ABC$ uchun Styuart teoremasidan, $AGDF$ va $CFDE$ to‘rtburchaklar uchun esa Pitot teoremasidan foydalanamiz.

Styuart teoremasidan ma’lumki, agar $\triangle ABC$ ning uchlaridan chiqqan chiziqlar hosil qilgan kesmalar o‘rtasida quyidagicha bog‘liqlik mavjud (yuqoridagi rasmlardagi kabi):

$$AG * BE * CF = AF * CE * BG \Leftrightarrow k * t * y = m * x * z$$

Pitot teoremasida esa, agar to‘rtburchakka ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, qarama-qarshi tomonlari yig‘indisi teng bo‘lishi ko‘rsatilgan. Teoremani yuqorida hosil bo‘lgan 3 ta to‘rtburchakka tadbiq qilamiz:

$AGDF$ to‘rtburchak uchun $a + k = x + b$

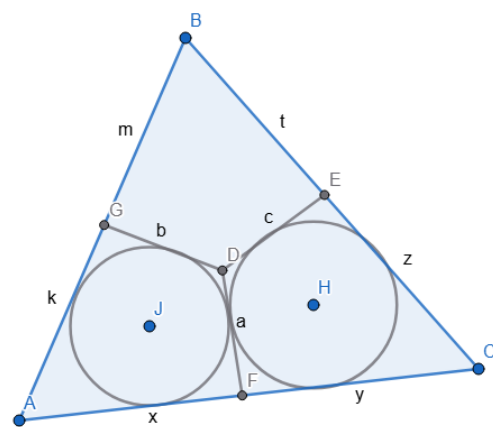
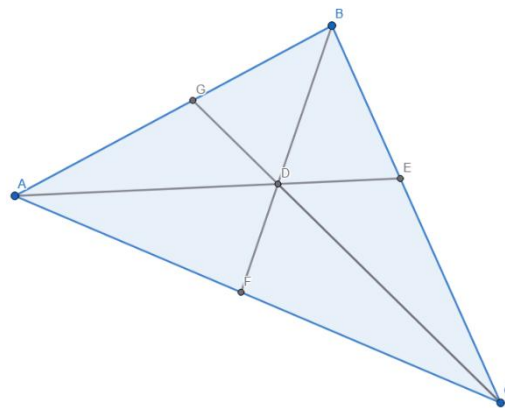
$FDEC$ to‘rtburchak uchun $c + y = a + z$

$BGDE$ to‘rtburchak uchun $m + c = b + t$

$$\begin{cases} a + k = x + b \\ c + y = a + z \\ m + c = b + t \end{cases} \text{ va } k * t * y = m * x * z \text{ lar o‘rinli bo‘lishi kerak. Uchinchi}$$

to‘rtburchakka ham ichki aylana chizishimiz uchun $m + c = b + t$ o‘rinli ekani isbotlanishi kerak. Demak, yuqoridagi tengliklardan quyidagilarni keltirib olsak bo‘ladi:

$$\begin{cases} b = k + a - x \\ t = \frac{mxz}{yk} \end{cases} ; \begin{cases} c = z + a - y \\ m = \frac{ykt}{xz} \end{cases}$$



Yuqorida hosil bo‘lgan ifodalarni isbotlanishi kerak bo‘lgan $m + c = b + t$ formulaga qo‘ysak, quyidagicha tenglik hosil bo‘lib qoladi:

$$k + a - x + \frac{xzm}{yk} = \frac{ykt}{xz} + z + a - y$$

Ikkala tomonni ham $xykz$ ga ko‘paytirib hosil bo‘lgan ifodani yozamiz:

$$k^2xyz - x^2kyz + x^2z^2m = y^2k^2t + xykz^2 - xkzy^2$$

$mxz = ykt$ tenglikdan foydalanib, ba’zi joylariga almashtirish kiritamiz:

$$k^2xyz - x^2kyz + ykt * xz = mxz * yk + xykz^2 - xkzy^2$$

Bir xil bo‘lgan ifodalarni qisqartiramiz. Tenglikning ikkala yonini ham xz ga bo‘lib, hosil bo‘lgan ifodani yozib olamiz:

$$k^2y - xky + ykt = myk + ykz - ky^2$$

Ikkala yonni ky ga bo‘lib yuborsak ham bo‘ladi:

$$k - x + t = m + z - y$$

Bu tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$x - y + m - t = k - z$$

Yuqorida Pitot teoremasini isbotlash uchun yozgan ifodalarimizdan foydalanib, quyidagi ikkita tenglikda ayirish amalini bajaramiz:

$$\begin{cases} x + b = a + k \\ c + y = a + z \end{cases}$$

$x + b - c - y = a + k - a - z$ ya’ni $x - y + b - c = k - z$ ekani kelib chiqadi. Agar $m + c = b + t$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $x - y + m - t = k - z$ tenglik o‘rinli ekani kelib chiqadi va yuqoridagi soddalashgan ifoda kabi ko‘rinishga keladi.

Demak, masala isbotlandi. Agar uchburchak uchlarida chiqqan to‘g‘ri chiziqlar ajratgan to‘rtburchaklarning ikkitasiga ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, uchinchisiga ham aylananing ichki chizish mumkin ekan.

Yuqoridagi masalaga o‘xshash yana bir masala yechimini ko‘ramiz. Masala sharti quyidagicha: ABC uchburchakda AD , BE va CF kesmalar bitta K nuqtada kesishadi. K nuqtadan AC ga o‘tkazilgan parallel to‘g‘ri chiziq EF va ED ni mos ravishda I va J nuqtalarda kesib o‘tadi. $IK=KJ$ ekanligini isbotlang. Masala shartiga mos chizma chizib olamiz:

Tomonlarga chizmada keltirilgandek belgilash kiritib olinadi. So‘ralgan ikki kesmaning tengligini isbotlash uchun, $\triangle BAE$ va $\triangle BEC$ larda umumiy o‘tkazilgan chiziq asosga parallel bo‘lganligi uchun, o‘xshashlik xossasini qo‘llaymiz, ya’ni agar uchburchakda biror to‘g‘ri chiziq uning bir tomoniga parallel o‘tkazilsa, u holda hosil bo‘lgan kichik uchburchak katta uchburchakka o‘xshash bo‘ladi va mos tomonlari o‘zaro proporsional bo‘ladi.

$$\triangle BAE \text{ uchun } \frac{m}{x+a} = \frac{m+k}{f}, \triangle BEC \text{ uchun}$$

$$\frac{m}{x+b} = \frac{m+k}{e} \text{ o‘rinli ekanidan,}$$

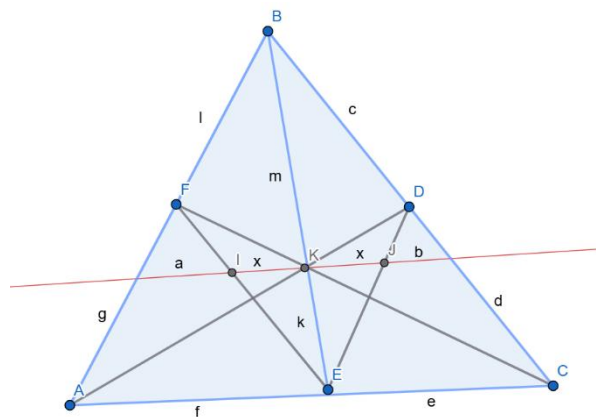
$$\begin{cases} x = \frac{mf}{m+k} - a \\ x = \frac{me}{m+k} - a \end{cases} \text{ kelib chiqadi.}$$

Xuddi shunday o‘xshashlik xossasini boshqa tomonlar uchun ham qo‘llaymiz.

$$\begin{cases} \frac{m}{c} = \frac{m+k}{c+d} \\ \frac{m}{l} = \frac{m+k}{g+l} \end{cases} \text{ tenglamalar sistemasi hosil bo‘lib qoladi va sistemani bo‘lib yuborilsa,}$$

quyidagicha ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{l}{c} = \frac{g+l}{c+d} \text{ bu tenglikni proporsiyadan foydalanib, soddalashtiramiz.}$$



$lc + ld = gc + lc$ bundan, $gc = ld$ ekani topiladi.

Yuqorida ko‘rsatilgan masalada va turli ma’lumotlarga ko‘ra bu uchburchak uchun ham Styuart teoremasi o‘rinli ekani kelib chiqadi, chunki uchburchak uchidan chiqqan kesmlar uchburchak ichida bir nuqtada kesishyapti, shuning uchun o‘rinli bo‘lgan formulani bu uchburchak uchun ham qo‘llaymiz. Demak,

$g * c * e = l * f * d$ tenglik o‘rinli ekani aniqlanadi. Yuqorida o‘xshashlik xossasidan foydalanib, soddalashtirganimizda $gc = ld$ ekani ma’lum bo‘lib qolgandi, bundan $e = f$ ekani kelib chiqadi.

Quyidagi tenglamalar sistemasini bo‘lish orqali yana soddalashtirishlar bajarishimiz mumkin,

$$\begin{cases} \frac{m}{x+a} = \frac{m+k}{f} \\ \frac{m}{x+b} = \frac{m+k}{e} \end{cases} \text{ bo‘lib yuborsak, } \frac{x+b}{x+a} = \frac{e}{f} \text{ hosil bo‘ladi. Avvalgi hosil bo‘lgan } e = f$$

tenglikdan $x + b = x + a$ ekani va $a = b$ kelib chiqadi.

$$\begin{cases} x = \frac{mf}{m+k} - a \\ x = \frac{mf}{me} - a \end{cases} \text{ bu ikki tenglik teng bo‘lishini aniq bo‘lib qoladi, ya’ni } e = f \text{ va } a = b$$

ekanidan uchburchak uchlaridan chiqqan chiziqlar uchburchak ichida kesishsa, va bu kesishgan nuqtadan asosga parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq bilan chizmadagi kabi o‘tkazilgan ikki to‘g‘ri chiziq kesishishidan hosil bo‘lgan ikki kesma teng ekani kelib chiqadi.

MUHOKAMA

Uchburchak ichida hosil bo‘ladigan geometrik konfiguratsiyalar ko‘pincha invariant xossalarga ega bo‘ladi. Bunday invariantlar — bu shakl o‘zgarganda ham saqlanib qoladigan munosabatlardir. Mazkur masalada ham hosil bo‘lgan to‘rtburchaklar o‘rtasidagi bog‘lanishlar aynan shunday invariant xossalarga asoslanadi.

Tangensial to‘rtburchaklar uchun quyidagi muhim fakt o‘rinlidir: agar to‘rtburchakka ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, uning barcha tomonlariga tushirilgan urinmalar uzunliklari o‘zaro teng bo‘ladi. Bu esa har bir uchdan chizilgan urinmalar juft-juft teng bo‘lishini anglatadi va natijada qarama-qarshi tomonlar yig‘indilari tengligi kelib chiqadi.

Shuningdek, uchburchak ichida kesishuvchi uchta chiziq ko‘pincha maxsus nuqtalarni hosil qiladi. Masalan, agar bu chiziqlar medianalar bo‘lsa — og‘irlik markazi, bissektrisalar bo‘lsa — ichki aylana markazi, balandliklar bo‘lsa — ortotsentr hosil bo‘ladi. Ushbu maqolada esa umumiy hol qaralayotgan bo‘lib, chiziqlarning ixtiyoriy bo‘lishiga qaramay, ular orasida muhim nisbatlar saqlanib qoladi.

Bundan tashqari, kesmalar o‘rtasidagi ko‘paytmalar tengligi (masalan, Styuart teoremasidan olingan) uchburchak ichidagi chiziqlar o‘zaro qanday bog‘langanligini ko‘rsatadi. Bu tengliklar yordamida murakkab konfiguratsiyalarni oddiy algebraik shaklga keltirish mumkin.

Yana bir muhim jihat shundaki, o‘xshash uchburchaklar yordamida olingan nisbatlar ko‘pincha boshqa teoremlar bilan uyg‘unlashadi. Masalan, Ceva teoremasi uchta kesmaning bir nuqtada kesishish shartini beradi, Menalay teoremasi esa kesmalar bir to‘g‘ri chiziqda yotgan holatni ifodalaydi. Bu teoremlar mazkur masalani yanada umumlashtirish imkonini beradi.

XULOSA

Ushbu tadqiqot natijalarini umumlashtirib aytish mumkinki, uchburchak ichida hosil bo‘lgan to‘rtburchaklar o‘zaro mustaqil emas, balki ular orasida aniq matematik bog‘lanishlar mavjud. Xususan, ikki to‘rtburchak uchun ichki aylana mavjudligi uchinchi to‘rtburchak uchun ham zarur shartlarni yuzaga keltirishi isbotlandi.

Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, geometrik konfiguratsiyalarda lokal xossalari global natijalarga olib keladi, ya’ni tizimning bir qismidagi xossa butun konfiguratsiyaga ta’sir qiladi. Bu esa geometriyada o‘zaro bog‘liqlik va invariantlik tushunchalarining muhimligini yana bir bor tasdiqlaydi.

Ushbu ishning ilmiy ahamiyati shundaki, unda tangensial to‘rtburchaklarning o‘zaro bog‘liqligi umumiy holda ko‘rib chiqildi va bir nechta teoremlarni uyg‘un holda qo‘llash orqali yangi natijaga erishildi.

Kelgusida ushbu natijalarni yanada umumlashtirib, ko‘pburchaklar yoki fazoviy geometrik shakllar uchun ham shunga o‘xshash qonuniyatlarni o‘rganish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

1. Pogorelov A.V. — Geometriya asoslari, Moskva, 2005.
2. Coxeter H.S.M. — Introduction to Geometry, New York, 1989
3. Umirzaqova, K. O. (2020). PERIODIC GIBBS MEASURES FOR HARD-CORE MODEL. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, 2(3), 67-73.
4. qizi Abdug‘apporova, M. N. (2025). PARABOLAGA ICHKI CHIZILGAN O‘ZARO URINUVCHI AYLANALAR. *RESEARCH AND EDUCATION*, 4(12), 154-159.
5. Xakimov, R. M. (2019). IMPROVEMENT OF ONE RESULT FOR THE POTTS MODEL ON THE CALEY TREE. *Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology*, 1(6), 3-8.
6. O‘G, O. K. I. Q., O‘G‘Li, J. A. H., & O‘G, H. T. X. D. (2024). FUNKSIONAL QATORNI HADLAB INTEGRALLASH VA DIFFERENSIALLASHDAN FOYDALANIB BA’ZI BIR SONLI QATORLAR YIG ‘INDISINI TOPISH METODLARI. *Science and innovation*, 3(Special Issue 57), 411-416.
7. O‘G, O. K. I. Q., Qizi, N. M. S. N., & Qizi, A. M. O. A. (2024). TEYLOR QATORI YORDAMIDA BA’ZI BIR SONLI QATORLARNING YIG ‘INDISINI TOPISH USULLARI. *Science and innovation*, 3(Special Issue 57), 275-277.