

$y = ax^2$ PARABOLA VA $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ AYLANA FUNKSIYALARINING O‘ZARO JOYLASHUVI

Abdulazizova Gulbahor Rustamjon qizi

Namangan davlat pedagogika instituti

Aniq va tabiiy fanlar fakulteti talabasi

Tel: + 998 50 117 96 62

E-mail: abdulazizovgulbahor11@gmail.com

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.21059084>

Annotatsiya: Ushbu maqolada kvadratik funksiya va aylana tenglamasining o‘zaro kesishish shartlari algebraik va geometrik usullar yordamida tadqiq etilgan. Tatqiqot davomida tizimli tenglamalar bikvadrat ko‘rinishga keltirilib, diskriminant va viyet teoremasi asosida tahlil qilingan. Maqolada funksiyalarning parametrlariga (a , b , R) bog‘liq ravishda umumiy nuqtalar soni 1 ta , 2 ta, 3 ta va 4 ta bo‘lishining aniq matematik shartlari keltirilgan. Shuningdek , aylananing parabola ichida joylashishi va urinish nuqtalarining kritik qiymatlari asoslab berilgan. Olingan natijalar murakkab geometrik masalalarni yechishda va funksional bog‘liqliklarni o‘rganishda amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar: Matematik analiz, parabola, aylana, kesishish nuqtalari, bikvadrat tenglama, diskriminant, parametrli tahlil, geometrik optimallashtirish.

ANALYSIS OF THE RELATIVE POSITION AND THE NUMBER OF COMMON POINTS OF THE FUNCTIONS $Y=Ax^2$ and $x^2 + (y - b)^2 = R^2$

Abstract: This article investigates the intersection conditions of a quadratic function and a circle equation using algebraic and geometric methods. In the course of the study, the system of equations was reduced to a biquadratic form and analyzed based on the discriminant and Vieta's theorem. The article presents precise mathematical conditions for the number of common points to be 1, 2, 3 or 4 depending on the parameters (a , b , R) of the functions. Furthermore, the critical values for the functions. Furthermore, the critical values for the circle's placement within the parabola and the tangency points are substantiated. The results obtained are of practical importance in solving complex geometric problems and studying functional dependencies.

Key words: Mathematical Analysis, parabola circle points of intersection, biquadratic equation, discriminant, parametric analysis, geometric optimization

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ И УСЛОВИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПАРАБОЛЫ $y = ax^2$ И ОКРУЖНОСТИ $ax^2 + (y - b)^2 = R^2$

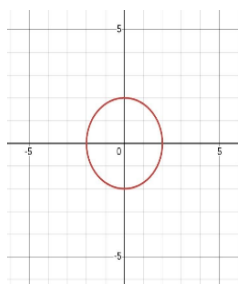
Аннотация: В данной статье исследуются условия взаимного пересечения квадратичной функции и уравнения окружности с использованием алгебраических и геометрических методов. В ходе исследования системы уравнений приводятся к биквадратному виду и анализируются на основе дискриминанта и теоремы Виета. В работе выведены точные математические условия, при которых количество общих точек в зависимости от параметров функций (a , b , R) может составлять 1, 2, 3 или 4. Также обосновано расположение окружности внутри параболы и определены критические значения точек касания. Полученные результаты имеют практическое значение при решении сложных геометрических задач и изучении функциональных зависимостей.

Ключевые слова: математический анализ, парабола, окружность, точки пересечения, биквадратное уравнение, дискриминант, параметрический анализ, геометрическая оптимизация

Kirish: Zamonaviy matematika, muhandislik va fizika masalalarida turli egri chiziqlarning o‘zaro joylashuvini tadqiq etish fundamental ahamiyatga ega. Kundalik hayotimizda va yuqori texnologiyalarda eng ko‘p uchraydigan shakllardan biri bu aylana va paraboladir. Xususan, ushbu

ikki shaklning o‘zaro kesishish nuqtalarini aniqlash optik tizimlarni loyihalash, astronomik hisob-kitoblar hamda mexanik detallarning tutashish aniqligini baholashda keng qo‘llaniladi. Shuningdek, bu kabi masalalar o‘quvchilarning geometrik tushunchalarini algebraik tahlil bilan sintez qilishda metodik jihatdan katta qiymatga ega.

Tadqiqot obyekti sifatida tanlangan shakllar quyidagicha tavsiflanadi :



Aylana – tekislikda berilgan nuqtadan (markazdan) bir xil masofada (radius) yotgan barcha nuqtalar to‘plamidir. Aylana elementlari . Markaz (O): Aylananing qoq markazidagi nuqta.

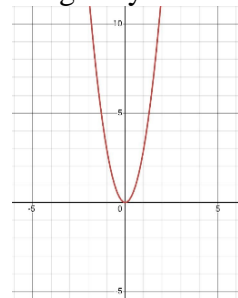
Radius (R): Markazni aylana ustidagi istalgan nuqta bilan tutashtiruvchi kesma.

Diametr (D): Markaz orqali o‘tib, aylananing ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma. Diametr radiusdan ikki baravar uzun: $D = 2R$.

Vatarlar: Aylananing ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma. Eng uzun vatar — diametrdir. Yoy: Aylananing vatar bilan ajratilgan qismi. Dekart koordinatalar sistemasida markazi (a; b) nuqtada va radiusi R ga teng bo‘lgan aylana tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Maqolamizda biz markazi ordinata o‘qida M(0, b) nuqtada joylashgan va radiusi R ga teng bo‘lgan aylanani ko‘rib chiqamiz.

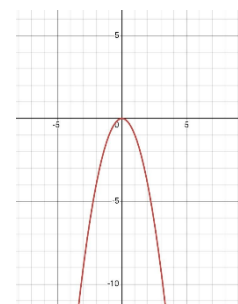


Kvadratik funksiya — bu $y = ax^2 + bx + c$ ko‘rinishidagi funksiya bo‘lib, bu yerda a, b, c haqiqiy sonlar va $a \neq 0$ sharti bajarilishi shart. Ushbu funksiyaning grafigi parabola deb ataladi.

$ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamasi ikkita haqiqiy ildizga ega bo‘ladi. Bu ildizlar parabolaning Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalarining koordinatalaridir. $D > 0$ bo‘lganda grafikning holati a koeffitsiyentiga bog‘liq:

Agar $a > 0$ bo‘lsa: Parabola shoxlari yuqoriga qaragan va u Ox o‘qini ikki joydan kesib, pastga "sho‘ng‘iydi". Parabolaning uchi Ox o‘qidan pastda

joylashadi .



Agar $a < 0$ bo‘lsa: Parabola shoxlari pastga qaragan va u Ox o‘qini ikki joydan kesib, yuqoriga "chiqadi". Parabolaning uchi Ox o‘qidan yuqorida joylashadi . Ishning asosiy maqsadi — aylananing markazi (b) va radiusi (R) hamda parabolaning koeffitsiyenti (a) o‘rtasidagi bog‘liqlikni tahlil qilish orqali umumiy nuqtalar sonini aniqlovchi aniq oraliqlarni topishdir .

$$y = ax^2 \quad x^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Ikki shaklning umumiy nuqtalarini topish uchun ularning tenglamalaridan iborat tizim tuziladi.

Ikkinchi funksiyadagi y ning o‘rniga birinchi funksiyadagi ax^2 ni qo‘yamiz . Natijada bizda bikvadrat tenglama ya’ni to‘rtinchi darajali tenglama hosil bo‘ladi .

$$ax^2 + (ax^2 - b)^2 = R^2$$

$$a^2x^4 + x^2(1 - 2ab) + 4a^2(b^2 - R^2) = 0$$

$$x^2 = t$$

$$a^2t^2 + (1 - 2ab)t + 4a^2(b^2 - R^2) = 0$$

1 ta nuqta uchun oraliqni aniqlash.

Aylana va parabola uchi koordinata boshida (0,0) uchrashishi uchun $b = R$ sharti bajarilishi lozim. Bikvadrat tenglamani t o‘zgaruvchisi orqali tahlil qilish . Ushbu shartni tenglamaga qo‘yamiz:

$$a^2t^2 + t(1 - 2ab) + 4a^2(R^2 - R^2) = 0$$

$$a^2t^2 + t(1 - 2ab) = 0$$

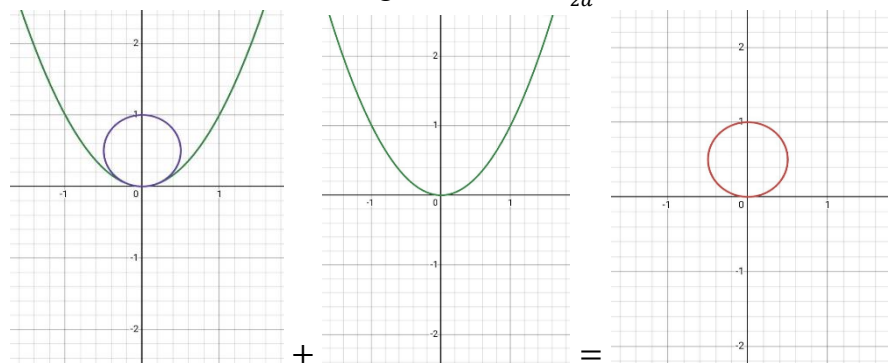
tenglamani birinchi ildiz $t_1 = 0$ ga teng , ikkinchi ildiz $\frac{2aR-1}{a^2}$ ga teng . Tizimda boshqa umumiy nuqtalar hosil bo‘lmasligi uchun ikkinchi ildiz nomanfiy bo‘lmasligi, ya’ni $t_2 \geq 0$ shartini qanoatlantirmasligi kerak.

Agar $t_2 > 0$ bo‘lsa, u holda $x = \pm\sqrt{t_2}$ bo‘lib, yana ikkita qo‘shimcha nuqta hosil bo‘ladi. Shuning uchun faqat 1 ta nuqta qolishi uchun bizga $t_2 \leq 0$ sharti zarur: Bu yerda a^2 har doim musbat, shuning uchun suratni nolga tenglashtiramiz yoki noldan kichik deb olamiz:

$$\begin{aligned} 2aR - 1 &\leq 0 \\ 2aR &\leq 1 \end{aligned}$$

Shunday qilib, t o‘zgaruvchisi orqali tahlil qilganimizda, aylananing radiusi quyidagi oraliqda bo‘lganda tizim faqat 1 ta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi isbotlandi :

$$\text{Oraliq'i: } 0 < R \leq \frac{1}{2a}$$



Uchta umumiy nuqta holati

Aylana va parabolaning umumiy uchta nuqtaga ega holatini topish uchun

$$a^2t^2 + (1 - 2ab)t + 4a^2(b^2 - R^2) = 0$$

tenglama bitta ildizi 0 ga teng, ikkinchi ildiz esa musbat bo‘lishi shart. Shunda bitta ildizini 0 ga tenglaganimizda bitta ildiz, ikkinchi ildiz musbat bo‘lgani uchun undan ikkita ildiz chiqadi, jami 3 ta ildiz bo‘ladi.

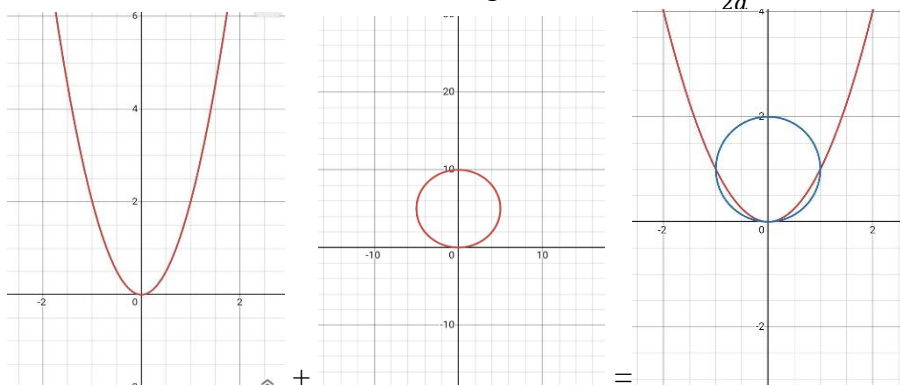
$$x^2 = t_1 = 0$$

$x=0$ (1 ta nuqta) va $x^2 = t_2 > 0$ $x = \pm\sqrt{t_2}$ (2 ta nuqta) Jami: $1 + 2 = 3$ ta nuqta.

Aylana parabola uchida tegib turishi uchun $b = R$ bo‘lishi kerak. Bu holatda tenglama ko‘rinishiga keladi. Ikkinchi ildiz musbat bo‘lgani uchun quyidagicha ko‘rinishga keladi.

$$t_2 = \frac{2aR-1}{a^2} \quad 2aR - 1 > 0$$

$$\text{Oraliq'i: } b = R \quad R > \frac{1}{2a}$$



Ikki umumiy nuqta holati

Aylana va parabola ikki nuqtada kesishishi uchun t ga nisbatan kvadrat tenglamadan

$$a^2t^2 + (1 - 2ab)t + 4a^2(b^2 - R^2) = 0$$

birinchi ildiz musbat, ikkinchi ildiz manfiy bo‘lishi kerak. Shunda musbat ildizdan ikkita nuqta kelib chiqadi, ikkinchi ildiz esa haqiqiy yechimga ega bo‘lmaydi.

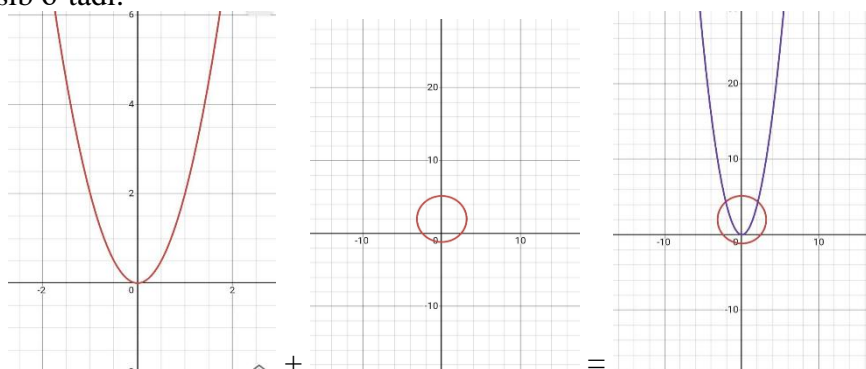
Yani $t_1 > 0$ va $t_2 < 0$ bo‘lsa, u holda $x^2 = t_1$ dan $x^2 = \pm\sqrt{t_1}$ 2 ta nuqta kelib chiqadi, $x^2 = t_2$ esa haqiqiy yechimga ega emas.

Viyet teoremasiga ko‘ra ildizlar ko‘paytmasi manfiy bo‘lishi kerak:

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_2 < 0 \quad \frac{b^2 - R^2}{a^2} < 0 \\ b^2 - R^2 < 0 \quad |b| < R \end{aligned}$$

Oraliq’i : $|b| = R$

Bunda aylana markazi radiusdan kichik masofada joylashadi va aylana parabola shoxlarini ikki tomondan kesib o’tadi.



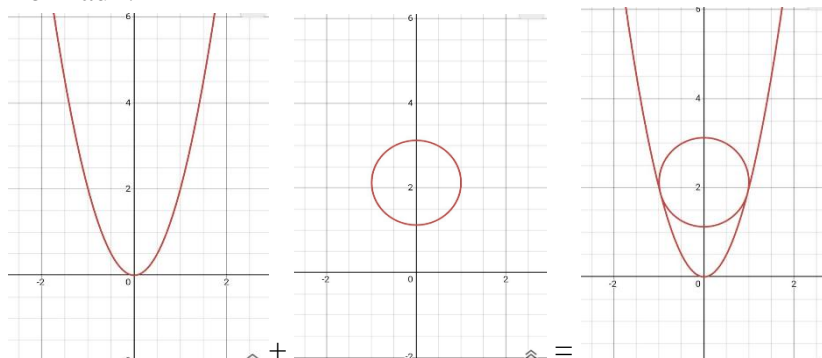
Ikki umumiy nuqta holati

Aylana va parabolaning urinish holati: $D = 0$ sharti bo’yicha tahlil .Tadqiqot jarayonida shuni aniqladikki, umumiy nuqtalar sonini faqatgina b va R ning o’zaro nisbati ($b < R$ yoki $b = R$) bilan cheklab bo’lmaydi. Grafik tahlillar shuni ko’rsatdiki, aylananing markazi radiusdan balandroqda yotgan ($b > R$) holatda ham, tizim faqat 2 ta umumiy nuqtaga ega bo’lishi mumkin.

Bunda aylana parabola uchidan uzilib, yuqoriga ko’tariladi va uning shoxlariga ikki tomondan simmetrik ravishda urinadi. Ushbu maxsus holatni $a=2$, $b=17/8$, $R=1$ parametrlari misolida ko’rib chiqamiz: Yuqoridagi parametrlar asosida

$$a^2 t^2 + (1 - 2ab)t + 4a^2(b^2 - R^2) = 0$$

Diskriminantning nolga teng bo’lishi t (ya’ni x^2) ning yagona musbat ildizga ega ekanligini bildiradi . Ushbu natija shuni isbotlaydiki, $D = 0$ sharti bajarilganda, aylana va parabola tizimi parametrlarning o’ta nozik mutanosibligiga ega bo’ladi. Bu nuqtada kesishish emas, balki ikki nuqtada urinish sodir bo’ladi .



To’rtta umumiy nuqta holati

Aylana parabola ichida to’rt nuqtada kesishishi uchun kvadrat tenglama ikkita turli musbat ildizga ega bo’lishi kerak .

$$\begin{aligned} x^2 = t_1 & & x = \pm\sqrt{t_1} \\ x^2 = t_2 & & x = \pm\sqrt{t_2} \end{aligned}$$

Matematik shartlari.

Diskriminant musbat bo’lishi kerak: $D > 0$.

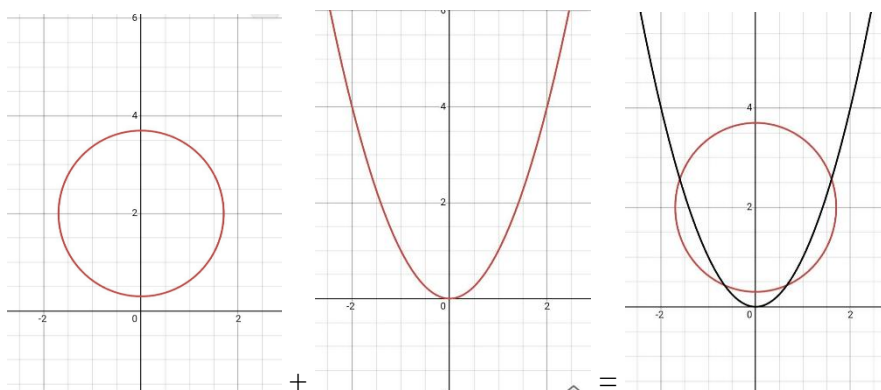
Ildizlar ko’paytmasi musbat: $t_1 \times t_2 > 0$

$$b^2 - R^2 > 0 \quad b > R$$

Ildizlar yig’indisi musbat: $t_1 + t_2 > 0$

$$\frac{2ab-1}{a^2} > 0 \quad b > \frac{1}{2a}$$

Geometrik ma’nosi: Aylana markazi yetarlicha balandda va uning radiusi parabola ichiga "sig’adigan" darajada mos bo’lishi kerak.



Xulosa:

Ushbu tadqiqot doirasida aylana va parabolaning o‘zaro joylashuvi hamda ularning umumiy nuqtalari sonini aniqlash masalasi kompleks ravishda tahlil qilindi. Olib borilgan izlanishlar shuni ko‘rsatadiki, ikki shakl o‘rtasidagi geometrik munosabatlar shunchaki tasodifiy koordinatalar to‘plami emas, balki aniq matematik qonuniyatlarga bo‘ysunuvchi tizimdir.

Tadqiqotning eng muhim natijasi sifatida shuni ta’kidlash joizki, parabolaning egrilik darajasini belgilovchi a koeffitsiyenti va aylananing fizik o‘lchami bo‘lgan R radiusi o‘rtasidagi $1/2a$ nisbati barcha geometrik o‘zgarishlarning kalitidir. Aynan shu qiymat aylana va parabolaning bir-biriga "moslashish" darajasini belgilab beradi. Agar aylananing radiusi ushbu kritik chegaradan oshmasa, u parabola ichida barqaror va yagona nuqtaga ega bo‘ladi. Ushbu chegaradan o‘tilishi bilan tizimda murakkabroq konfiguratsiyalar — uch nuqtali uchrashuvlar yoki to‘rt nuqtali kesishishlar paydo bo‘ladi.

Shuningdek, to‘rtinchi darajali bikvadrat tenglama va Diskriminant tahlili orqali isbotlandiki, aylana va parabola o‘rtasida nafaqat kesishish, balki "nozik urinish" holatlari ham mavjud. Biz ko‘rib chiqqan $D = 0$ holati shuni ko‘rsatadiki, hatto aylananing markazi yuqori ordinatalarda joylashgan bo‘lsa ham, parametrlarning ma’lum bir mutanosibligida aylana parabola shoxlariga simmetrik ravishda tegib turishi mumkin. Bu esa, o‘z navbatida, nazariy hisob-kitoblarning amaliy chizmalar (Desmos, GeoGebra) bilan to‘liq mos kelishini tasdiqlaydi.

Xulosa qilib aytganda, ushbu ishda keltirilgan analitik usullar geometriya va algebra fanlarining sintezini ko‘rsatib beradi. Olingan natijalar nafaqat nazariy matematika, balki optik asboblarda loyihalash, trayektoriyalarni hisoblash va muhandislik konstruksiyalarining aniqligini ta’minlashda muhim amaliy ahamiyatga ega. Mazkur tadqiqot o‘quvchi va mutaxassislariga murakkab geometrik masalalarni parametrik oraliqlar orqali tizimli hal qilish ko‘nikmasini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

1. Umirzaqova, K. O. (2020). PERIODIC GIBBS MEASURES FOR HARD-CORE MODEL. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, 2(3), 67-73.
2. qizi Abdug‘apporova, M. N. (2025). PARABOLAGA ICHKI CHIZILGAN O‘ZARO URINUVCHI AYLANALAR. *RESEARCH AND EDUCATION*, 4(12), 154-159.
3. Xakimov, R. M. (2019). IMPROVEMENT OF ONE RESULT FOR THE POTTS MODEL ON THE CALEY TREE. *Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology*, 1(6), 3-8.
4. O‘G, O. K. I. Q., O‘G‘Li, J. A. H., & O‘G, H. T. X. D. (2024). FUNKSIONAL QATORNI HADLAB INTEGRALLASH VA DIFFERENSIALLASHDAN FOYDALANIB BA’ZI BIR SONLI QATORLAR YIG ‘INDISINI TOPISH METODLARI. *Science and innovation*, 3(Special Issue 57), 411-416.
5. O‘G, O. K. I. Q., Qizi, N. M. S. N., & Qizi, A. M. O. A. (2024). TEYLOR QATORI YORDAMIDA BA’ZI BIR SONLI QATORLARNING YIG ‘INDISINI TOPISH USULLARI. *Science and innovation*, 3(Special Issue 57), 275-277.